

В. С. Коралюк

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СЛОЖНЫХ
ПУАССОНОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

В. С. Королюк

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ СЛОЖНЫХ ПУАССОНОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКОВА ДУМКА»
КИЕВ - 1975

УДК 519.21

Книга содержит результаты, полученные автором по исследованию граничных функционалов (вероятности достижения, величины перескока, максимума и др.) от сложного пуассоновского процесса со сносом и односторонними скачками с использованием потенциала и резольвенты процесса на полуоси. Полученные выражения для распределений граничных функционалов удобны для асимптотического анализа и имеют приложения в теории массового обслуживания, теории надежности, теории управления запасами и др.

Ответственный редактор
чл.-кор. АН УССР А.В.СКОРОХОД

Рецензент
чл.-кор. АН УССР И.Н.КОВАЛЕНКО

Редакция информационных изданий

К 20200-550
М221(04)-75

© Институт математики АН УССР, 1975 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге излагается метод потенциала применительно к граничным задачам для полунепрерывных случайных блужданий, описываемых суммами независимых одинаково распределенных случайных величин или сложными пуассоновскими процессами с положительными скачками и отрицательным сносом. Предлагаемый метод потенциала имеет собирательный характер: он позволяет свести изучение различных граничных функционалов к изучению одного единственного "функционала" — потенциала. Все другие граничные функционалы описываются с помощью потенциала единым стандартным алгоритмом.

Книга состоит из семи глав. В первой главе приведена классификация различных типов полунепрерывных случайных блужданий по виду их производящих операторов, из которой следует, что существенно различными типами являются сложные пуассоновские процессы и решетчатые случайные блуждания.

Во второй главе строится потенциал и резольвента сложного пуассоновского процесса на положительной полуоси и изучаются их свойства.

В третьей главе метод потенциала применяется для описания различных граничных функционалов при наличии одной поглощающей границы, двух поглощающих границ, одной поглощающей и одной задерживающей границы.

В четвертой и пятой главах рассматриваются соответственно задачи второй и третьей глав применительно к решетчатому типу полунепрерывных случайных блужданий. Учитывая определенную аналогию, изложение в этих главах ведется в сокращенной форме.

В шестой главе приведены для полноты изложения несколько прикладных моделей полунепрерывных случайных блужданий. В действительности же таких моделей много, так же как и литературы, посвященной им.

Не имея возможности перечислить все работы, относящиеся к рассматриваемой нами теме, мы отсылаем читателя к монографиям В.Феллера [21] и Л.Такача [20], где с достаточной полнотой представлены библиографические справки.

Укажем только, что ближе всего к нашему исследованию находится монография Л.Такача [20], в которой, по существу, используется потенциал в частных интерпретациях конкретных граничных задач.

В седьмой главе обсуждаются перспективы метода потенциала и его связь с методом факторизации. Оказывается, что добавление к сложному пуассоновскому процессу винеровской компоненты не меняет существа метода.

Глава 1

ТИПЫ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

§ 1.1. Введение

Сложные пуассоновские процессы широко применяются в разнообразных прикладных разделах теории вероятностей: в теории массового обслуживания, теории надежности, теории управления запасами, в связи с задачами о разорении, в теории порядковых статистик и т.д. и т.п.

Большинство задач для таких процессов относятся к так называемым граничным задачам, в которых изучаются граничные функционалы от траекторий процесса, связанные с выходом траектории процесса за некоторый уровень. При этом различают два типа границ: поглощающие и отталкивающие. Пересечение траекторий процесса поглощающей границы определяет граничные функционалы от траектории процесса до момента пересечения. В частности, граничным функционалом служит также момент пересечения заданного уровня. Отталкивающие границы "искажают" траекторию процесса, т.е. меняют его исходные характеристики, а следовательно, и граничные функционалы, определяемые другим поглощающим уровнем.

Исторически многие граничные задачи возникли в приложениях, и для каждой конкретной задачи создавались методы их решения. Более того, одна и та же граничная задача появлялась в различных приложениях, и при различных частных предположениях строилось ее решение различными методами.

После того, как прикладные постановки задач были сформулированы как граничные задачи для случайных блужданий, возникла классификация таких задач, не связанная с их интерпретацией в приложениях, и были созданы новые комбинаторные и аналитические методы решения таких задач. В основе этих методов лежат факторизационные тождества для производящих и характеристических функций [3, 20, 21]. Факторизационные соотношения, вообще говоря, не дают эффективные алгоритмы решения граничных задач. Однако существуют ситуации [3], в которых метод факторизации приводит к эффективным явным формулам. В таких ситуациях решения граничных задач можно получить и другими методами, не опирающимися явно на факторизационные тождества, что хорошо иллюстрирует монография Л. Такача [20]. Возникает в связи с этим вопрос, целесообразно ли для решения частных задач

применять методы, разработанные для более общих задач, или для данного частного класса задач следует создавать свой наиболее естественный метод? По-видимому, существуют сторонники как одной, так и другой точек зрения. Впрочем, возможна и третья позиция: интерес представляют оба подхода. Сравнение различных методов решения одних и тех же проблем обогащает наше понимание этих проблем. Бесспорным нам представляется лишь преимущество тех методов, применение которых сокращает количество различных задач. В граничных проблемах теории случайных блужданий различными задачами являются задачи изучения различных граничных функционалов.

Излагаемый метод потенциала применительно к одному типу случайных блужданий, так называемых непрерывных снизу (или сверху), позволяет свести решение различных граничных задач к изучению лишь одного функционала — потенциала случайного блуждания с одним поглощающим экраном. Конкретные граничные функционалы описываются единообразным стандартным алгоритмом. При этом специфические свойства конкретных граничных функционалов вытекают из общих свойств потенциала.

Метод потенциала нам представляется наиболее естественным алгоритмом для рассматриваемого класса задач. Отметим, что метод факторизационных тождеств [21], конечно, здесь тоже применим. Однако его область применимости значительно шире класса граничных задач для полунепрерывных снизу случайных блужданий, а потому схемы решения конкретных задач выглядят значительно сложнее. В подтверждение сказанного достаточно, например, сравнить решение задач о разорении методом факторизационных тождеств [18] и методом потенциала (см. § 3.6).

§ 1.2. Бернуллиевское случайное блуждание на полуоси

В этом параграфе на примере простейшего случайного блуждания, описываемого последовательностью сумм независимых одинаково распределенных двузначных случайных величин, излагаются основные особенности метода потенциала, применяемого систематически к анализу граничных задач для случайных блужданий, непрерывных снизу.

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин

$$\epsilon_k = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p; \\ -1 & \text{с вероятностью } q=1-p, (0 < p < 1). \end{cases} \quad (1)$$

Бернуллиевское случайное блуждание описывается последовательностью сумм

$$X_k = \sum_{r=1}^k \epsilon_r, \quad k=1; \quad X_0 = 0. \quad (2)$$

Производящий оператор K бернуллиевского случайного блуждания задается, как известно, соотношением

$$Ku_t = pu_{t+1} + qu_{t-1} - u_t \quad (3)$$

в пространстве \mathcal{H} последовательностей $u = \{u_t; t \in T\}$,
 T — множество целых чисел.

Введем операторы сдвига

$$Su_t = u_{t-1}; \quad S^{-1}u_t = u_{t+1}, \quad t \in T. \quad (4)$$

Оператор сдвига S сдвигает все члены последовательности u вправо на один член, так что на t -ом месте появляется член u_{t-1} . Аналогично оператор S^{-1} сдвигает все члены последовательности влево на один член.

Производящий оператор K представим в виде

$$K = pS^{-1} + qS - I, \quad (5)$$

где I — тождественный оператор: $Iu_t = u_t$, $t \in T$.

Символ оператора K задается соотношением

$$k(s) = ps^{-1} + qs - 1, \quad (6)$$

в котором s принимает допустимые значения в комплексной плоскости. Символ $k(s)$ определяет оператор K соотношением

$$K = k(s). \quad (7)$$

Рассмотрим проблему решения уравнения на полуоси $T_+ = \{t \geq 1\}$

$$Ku = \varphi; \quad u = \{u_t; t \in T_+\}, \quad \varphi = \{\varphi_t; t \in T_+\}. \quad (8)$$

Естественно попытаться решать уравнение (8), построив обращение оператора K на полуоси T_+ . На этом пути мы должны решить две задачи.

Первая задача состоит в следующем. Обратный оператор K^{-1} на всей оси T можно задать соотношением

$$K^{-1} = K^{-1}(s), \quad (9)$$

где $K^{-1}(s) = 1/K(s)$ в области допустимых значений аргумента s . При этом возникает вопрос, как следует понимать $K^{-1}(s)$? Известно [7], что на этот вопрос можно легко ответить, если выполняется условие

$$K(s) \neq 0 \quad \text{при } |s| = 1. \quad (10)$$

В нашем же случае условие (10), очевидно, не выполняется, так как $K(1) = 0$.

Вторая задача связана с тем, как по символу $K^{-1}(s)$ построить не только оператор K^{-1} , обратный K на всей оси T , но и оператор K_+^{-1} , обратный к оператору K на полуоси T_+ . Известно [3, 21], что эта вторая задача обычно решается методом факторизации исходного символа $K(s)$.

В нашем частном случае бернуллиевского случайного блуждания предлагается следующий путь построения обратного оператора K_+^{-1} . Определим

$$k_+^{-1}(s) = 1/K(s), \quad |s| < \min(1, s_0 = p/q), \quad (11)$$

т.е. рассмотрим аналитическое продолжение символа $1/K(s)$ внутрь единичного круга. При этом внутри единичного круга может оказаться полюс в точке $s_0 = p/q$, если $p < q$. Далее, определим

$$K_+^{-1} = K_+^{-1}(S_+), \quad (12)$$

где операторы сдвига S_+ и S_+^{-1} в пространстве последовательностей $u = \{u_t; t \geq 0\}$ задаются следующими соотношениями:

$$S_+ u_t = u_{t-1}, \quad t \geq 1; \quad S_+ u_0 = 0; \quad S_+^{-1} u_t = u_{t+1}, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Непосредственные вычисления позволяют убедиться в том, что $u = K_+^{-1} \varphi$ есть решение уравнения (8) на полуоси $T_+ = \{t \geq 1\}$.

Определение 1. Потенциал R бернуллиевского случайного блуждания на полуоси $\Gamma_+ = \{t \geq 1\}$ задается соотношениями

$$R = \kappa_+^{-1} e^{\theta}, \quad e_0^{\theta} = 1, \quad e_t^{\theta} = 0, \quad t \geq 1. \quad (14)$$

Или в координатной форме при $p \neq q$:

$$R_t = \frac{1}{p-q} [1 - (q/p)^t], \quad t \geq 0, \quad (15)$$

при $p = q = \frac{1}{2}$:

$$R_t = 2t, \quad t \geq 0. \quad (16)$$

Введение потенциала R объясняется следующими его свойствами, которые легко проверяются.

1°. Потенциал удовлетворяет уравнению

$$\kappa R_t = e^{\theta}, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

2°. Свертка $u = R * \varphi$, определяемая в координатной форме соотношением

$$u_t = \sum_{k=0}^t R_{t-k} \varphi_k, \quad (18)$$

удовлетворяет уравнению на полуоси Γ_+ :

$$\kappa u_t = \varphi_t, \quad t \geq 1. \quad (19)$$

3°. Общее решение уравнения (19) представимо в виде

$$u_t = C R_t + \sum_{k=0}^t R_{t-k} \varphi_k, \quad t \geq 1, \quad (20)$$

где C — произвольная постоянная.

4°. Производящая функция $r(s)$ потенциала R определяется соотношением

$$r(s) = \sum_{t=1}^{\infty} s^t R_t = \frac{1}{\kappa(s)}, \quad |s| < \min(1, s_0 = p/q). \quad (21)$$

Во многих задачах [21] возникает проблема обращения более общего оператора на полуоси Γ_+ :

$$\kappa_+ u_t = \lambda [p u_{t+1} + q u_{t-1}] - u_t. \quad (22)$$

Символ оператора K_λ задается соотношением

$$K_\lambda(s) = \lambda p s^{-1} + \lambda q s - 1. \quad (23)$$

При решении этой проблемы можно поступить так же, как и при обращении оператора K , рассматривая аналитическое продолжение символа внутрь единичного круга. В конечном итоге мы придем к следующему определению.

Определение 2. Резольвента $R(\lambda) = \{R_t(\lambda); t \geq 0\}$ бернуллиевского случайного блуждания на полуоси $T_+ = \{t \geq 1\}$ задается производящей функцией при $0 < |s| < 1$, $|\lambda| < |ps^{-1} + qs|^{-1}$:

$$r_\lambda(s) = \sum_{t=0}^{\infty} s^t R_t(\lambda) = [\lambda p s^{-1} + \lambda q s - 1]^{-1}. \quad (24)$$

Так определенная резольвента обладает свойствами, аналогичными свойствам потенциала. Прежде всего укажем на связь резольвенты и потенциала.

1°. Резольвента $R(\lambda)$ представима через потенциал R в виде следующего ряда:

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda} R * \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1} - 1)^n R^{n*}, \quad (25)$$

где

$$R^{n*} = R^{(n-1)*} * R.$$

2°. Резольвента $R(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$K_\lambda R_t(\lambda) = \lambda [p R_{t+1}(\lambda) + q R_{t-1}(\lambda)] - R_t(\lambda) = 0, \quad t \geq 1. \quad (26)$$

3°. Свертка $u = R_\lambda * \varphi$ удовлетворяет уравнению

$$K_\lambda u_t(\lambda) = \varphi_t(\lambda), \quad t \geq 1. \quad (27)$$

4°. Общее решение уравнения (27) представимо в виде

$$u(\lambda) = CR(\lambda) + R(\lambda) * \varphi(\lambda). \quad (28)$$

Приведенные свойства резольвенты вытекают из соответствующих свойств потенциала, формулы (24) и представления резольвенты в виде

$$\lambda R(\lambda) = R + (1 - \lambda) R(\lambda) * R, \quad (29)$$

которое следует из формулы (25).

Формулы (20) и (28), дающие общее решение уравнений (19) и (27), и представляют собой стандартный алгоритм решения граничных задач, так как изучение граничных функционалов можно всегда свести к изучению решений уравнений (19) и (27).

§ 1.3. Решетчатое случайное блуждание

В предыдущем параграфе было рассмотрено простейшее случайное блуждание непрерывное и снизу и сверху — бернуллиевское случайное блуждание. Перечислим другие типы непрерывных снизу решетчатых случайных блужданий.

1. Решетчатое случайное блуждание, непрерывное снизу, задается последовательностью сумм

$$X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1, \quad X_0 = 0, \quad (1)$$

независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин ξ_k , удовлетворяющих условию $P\{\xi_k < -1\} = 0$.

Пусть задано распределение случайных величин ξ_k :

$$P\{\xi_k = m\} = p_m, \quad m \geq -1 \quad (2)$$

с производящей функцией

$$p(s) = \sum_{m=-1}^{\infty} s^m p_m. \quad (3)$$

Производящий оператор дискретного непрерывного снизу случайного блуждания, описываемого последовательностью сумм (1), имеет вид

$$K u_t = [p(s) - 1] u_t = \sum_{m=1}^{\infty} p_m u_{t-m} - u_t. \quad (4)$$

Символом оператора K служит функция $k(s) = p(s) - 1$.

В приложениях часто встречается другая форма задания решетчатого случайного блуждания, непрерывного снизу, в виде последовательности

$$X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k^+ - n, \quad n \geq 0; \quad X_0 = 0, \quad (5)$$

где слагаемые ξ_k^+ неотрицательные:

$$P\{\xi_k^+ = m\} = p_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Очевидно, что блуждание (5) сводится к виду (1), если положить $\xi_k^+ = \xi_k^* - 1$.

2. Решетчатый пуассоновский процесс. Простейший пуассоновский процесс γ_n с дискретным временем задается последовательностью сумм независимых одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин:

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q = 1 - p, \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (6)$$

При этом

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k, \quad n \geq 1; \quad \gamma_0 = 0. \quad (7)$$

Интервалы между скачками процесса γ_n — независимы одинаково распределенные случайные величины ξ_k , имеющие геометрическое распределение:

$$P\{\xi_k = m\} = pq^m, \quad m \geq 0, \quad Ms^{\xi_k} = \frac{p}{1 - qs}. \quad (8)$$

Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных решетчатых случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$ с производящей функцией

$$Ms^{\xi_k} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m d_m = d(s). \quad (9)$$

Дискретный пуассоновский процесс, непрерывный снизу, определяется последовательностью

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_k - n, \quad n > 0; \quad \lambda_0 = 0. \quad (10)$$

Производящий оператор дискретного пуассоновского процесса со сносом определяется следующим образом. Найдем производящую функцию приращения процесса за один шаг

$$\Delta_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_{k+1} - 1. \quad (11)$$

где $I_p = I(t_{n+1} - 1)$ - индикатор с $MI_p = p$.

$$p(s) = Ms^{\Delta n} = s^{-1}q + pd(s)s^{-1} = s^{-1}q_1 + d_1(s), \quad (12)$$

где

$$q_1 = q + d_0 p, \quad d_1(s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m p d_{m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m d'_m. \quad (13)$$

Производящий оператор задается соотношением

$$K = p(s) - 1. \quad (14)$$

Сравнивая соотношение (14) с (4), приходим к заключению, что оба случайных блуждания определяют производящий оператор одного и того же типа.

3. Решетчатое блуждание с геометрически распределенной отрицательной компонентой. Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$, представимых в виде

$$\xi_k = \zeta_k - \eta_k, \quad k \geq 1; \quad (15)$$

где составляющие величины ζ_k и η_k - независимы неотрицательны с производящими функциями

$$Ms^{\zeta_k} = \sum_{m=0}^{\infty} s^m d_m = d(s); \quad Ms^{\eta_k} = p \sum_{m=0}^{\infty} s^m q_m = \frac{p}{1-qs}. \quad (16)$$

Случайное блуждание описывается последовательностью следующих сумм:

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1; \quad \lambda_0 = 0. \quad (17)$$

Производящий оператор K такого случайного блуждания задается своим символом $k(s)$ в виде

$$K = k(s), \quad k(s) = Ms^{\xi_k} - 1 = \frac{pd(s)}{1-qs^{-1}} - 1. \quad (18)$$

Заметим, что

$$k(s) = \frac{qs^{-1} + pd(s) - 1}{1-qs^{-1}}. \quad (19)$$

Так что производящий оператор случайного блуждания, описанного в данном пункте, отличается от производящих операторов, описанных в п.1 и 2, на множитель $q = (1 - qS^{-1})^{-1}$.

Можно по иному задать решетчатое блуждание с геометрически распределенной отрицательной компонентой. Введем последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$, представимых в виде

$$\xi_k = I_{p_0} \eta_k - I_{q_0} \zeta_k, \quad k \geq 1, \quad (20)$$

где составляющие величины η_k и ζ_k — независимы неотрицательны с производящими функциями (16), а индикаторы I_p и I_q таковы, что

$$I_{p_0} + I_{q_0} = 1; \quad MI_{p_0} = p_0, \quad MI_{q_0} = q_0 = 1 - p_0. \quad (21)$$

Тогда производящая функция ξ_k имеет вид

$$Ms^{\xi_k} = MI_{p_0} s^{\eta_k} + MI_{q_0} s^{-\zeta_k} = p_0 d(s) + q_0 \frac{p}{1 - qs}. \quad (22)$$

В этом случае, как легко видеть, производящий оператор случайного блуждания, описываемого последовательностью сумм случайных величин ξ_k , того же вида, что и задаваемый формулами (18) и (19).

§ 1.4. Случайное блуждание, непрерывное снизу

Произвольное непрерывное снизу случайное блуждание характеризуется наличием экспоненциально распределенной отрицательной компоненты величины скачка.

1. Случайное блуждание с экспоненциальным распределением отрицательной составляющей скачка задается последовательностью сумм независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$, представимых в виде

$$\xi_k = \eta_k - \zeta_k, \quad k \geq 1, \quad (1)$$

где составляющие величины η_k и ζ_k — независимы неотрицательны с характеристическими функциями:

$$Me^{is\eta_k} = \int_0^{\infty} e^{isx} dF(x) = f(s); \quad Me^{is\zeta_k} = \frac{a}{a+s}, \quad (\text{Im } s > 0). \quad (2)$$

Производящий оператор K дискретного случайного блуждания, описываемого суммами $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n \geq 1$, $X_0 = 0$, определяется своим символом

$$k(z) = Me^{iz\xi_k} - 1 = \frac{af(z) - 1}{a + iz} - 1 = \frac{a(f(z) - 1) - iz}{a + iz}. \quad (3)$$

В числителе стоит символ $k_0(s) = a(f(s) - 1) - is$ оператора K^0 , задаваемого в виде

$$K^0 u(x) = \frac{du(x)}{dx} + a \int_0^{\infty} [u(x-y) - u(x)] df(y). \quad (4)$$

Множитель $\frac{1}{a + iz}$ соответствует операции свертки с экспонентой: так что оператор K с символом (3) задается в виде

$$Ku(x) = \int_x^{\infty} e^{-a(y-x)} K^0 u(y) dy. \quad (5)$$

Эквивалентное случайное блуждание с экспоненциально распределенной отрицательной компонентой может быть задано случайными величинами

$$\xi_k = I_p^{(k)} \zeta_k - I_q^{(k)} \xi_k, \quad k \geq 1, \quad (6)$$

где ζ_k и ξ_k имеют характеристические функции (2), а индикаторы $I_p^{(k)}$ и $I_q^{(k)}$ независимы (по k) и удовлетворяют условиям

$$I_p^{(k)} + I_q^{(k)} = 1; \quad MI_p^{(k)} = p; \quad MI_q^{(k)} = q = 1 - p. \quad (7)$$

В этом случае производящий оператор случайного блуждания, описываемого последовательностью сумм случайных величин вида (6), задается символом

$$k(z) = Me^{iz\xi_k} - 1 = pf(z) + q \frac{a}{a + iz} - 1. \quad (8)$$

Если распределение $F(x)$ абсолютно непрерывно, тогда символ (8) определяет производящий оператор того же типа, что и символ (3), так как в этом случае

$$k(z) = pf(z) + \frac{qa}{a + iz} - 1 = \frac{ap(f_1(z) - 1) - iz}{a + iz}, \quad (9)$$

где $f_1(z) = (1 + \frac{iz}{a})f(z)$.

2. Сложный пуассоновский процесс со сносом. Простейший пуассоновский процесс ν_t с непрерывным временем задается, как известно, распределением

$$P\{\nu_t = k\} = \frac{(at)^k}{k!} e^{-at}, \quad k \geq 0. \quad (10)$$

Здесь $a > 0$ — параметр экспоненциального распределения интервалов ξ между скачками процесса.

Пусть задана последовательность независимых неотрицательных одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_k, k \geq 1\}$ с функцией распределения $F(x) = P\{\xi_k \leq x\}$. Сложный пуассоновский процесс задается соотношением

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_k, \quad t \geq 0, \quad \lambda(0) = 0. \quad (11)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать пуассоновский процесс с отрицательным сносом

$$\lambda_1(t) = \lambda(t) - 1. \quad (12)$$

Индекс 1 означает, что параметр сноса равен единице.

В рассматриваемых здесь граничных задачах предположение о том, что параметр сноса равен единице не ограничивает общности, так как всегда можно изменить масштаб на временной оси так, чтобы параметр сноса был равен единице. При этом, конечно, соответствующим образом изменится параметр a пуассоновского процесса.

Определим кумулянту процесса $\lambda_1(t)$:

$$k(s) = \ln M e^{-s\lambda_1(t)} = a(f(s) - 1) + s, \quad (13)$$

где

$$f(s) = M e^{-s\xi_k} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x). \quad (14)$$

Кумулянта $k(s)$ определяет производящий оператор сложного пуассоновского процесса $\lambda_1(t)$ со сносом в виде

$$Ku(x) = \frac{du(x)}{dx} + a \int_0^{\infty} [u(x-y) - u(x)] dF(y). \quad (15)$$

3. Винеровский процесс со сносом

$$\dot{x}(t) = \sigma^2 w(t) + at,$$

где $w(t)$ — стандартный нормированный винеровский процесс с $Mw(t) = 0$ и $Dw(t) = \sigma^2 t$ имеет производящий оператор

$$Ku(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} + a \frac{du}{dx}. \quad (16)$$

Так же как и в случае бернуллиевского случайного блуждания (см. § 1.2), для винеровского процесса со сносом потенциал $R(x)$ и резольвента $R_\lambda(x)$ на полуоси $x \geq 0$ строятся с помощью аналитического продолжения в правую полуплоскость функций $[K(s)]^{-1}$ и $[K(s) - \lambda]^{-1}$, где $K(s) = \frac{\sigma^2}{2} s^2 + as$ — символ производящего оператора K .

Зададим

$$r(s) = \int_0^\infty e^{-sx} R(x) dx = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2} s^2 + as}, \quad \text{Re } s > 0 \quad (17)$$

и

$$r_\lambda(s) = \int_0^\infty e^{-sx} R_\lambda(x) dx = \frac{1}{\frac{\sigma^2}{2} s^2 + as - \lambda}, \quad \text{Re } s > 0. \quad (18)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что потенциал $R(x)$ задается выражением

$$R(x) = \frac{\sigma^2}{2a} \left[1 - e^{-\frac{2a}{\sigma^2} x} \right], \quad x \geq 0. \quad (19)$$

Резольвенту $R_\lambda(x)$ можно выразить в явном виде, используя корни $s_1(\lambda)$ и $s_2(\lambda)$ квадратного уравнения $\frac{\sigma^2}{2} s^2 + as - \lambda = 0$:

$$R_\lambda(x) = \frac{1}{s_1(\lambda) - s_2(\lambda)} \left[e^{s_1(\lambda)x} - e^{s_2(\lambda)x} \right], \quad x \geq 0. \quad (20)$$

Нормирующие условия

$$R'(0) = R'_\lambda(0) = 1 \quad (21)$$

позволяют легко убедиться в том, что общее решение уравнений

$$Ku = \varphi \quad \text{и} \quad Ku_\lambda - \lambda u_\lambda = \varphi_\lambda \quad (22)$$

представимы в стандартной форме

$$u(x) = \int_0^x R(x-y)\varphi(y)dy + CR(x); \quad (23)$$

$$u_n(x) = \int_0^x R_n(x-y)\varphi_n(y)dy + C_n R_n(x),$$

где C и C_n — произвольные параметры, независимые от x .
Предоставляем читателю проверить свойства потенциала и резольвенты, приведенные в § 1.2.

4. Смесь пуассоновского и винеровского процессов. Наиболее общий тип случайных блужданий, для которых строятся потенциал и резольвента методом аналитического продолжения символа производящего оператора, задается смесью пуассоновского и винеровского процессов $\lambda(t)$ с логарифмом характеристической функции

$$k(s) = \ln M \exp[-s\lambda(t)] = -bs + \frac{\sigma^2}{2}s^2 + a \int_0^\infty (e^{-sx} - 1) dF(x). \quad (24)$$

Производящий оператор K , символ которого задается формулой (24), имеет вид

$$Ku(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + a \int_0^\infty [u(x-y) - u(x)] dF(y). \quad (25)$$

Мы выделяем такой тип случайных блужданий, так как вывод уравнений для граничных функционалов отличен от вывода уравнений для чисто скачкообразных случайных блужданий, и к тому же появляются некоторые специфические особенности потенциала такого случайного блуждания на полуоси.

5. Обсуждение. Перечисленные в данном параграфе типы непрерывных снизу случайных блужданий характеризуются общностью свойств их производящих операторов и единым методом построения потенциала и резольвенты на полуоси. Как и в случае применения других методов изучения граничных функционалов, например, комбинаторных методов (см. [20]), или метода факторизации (см. [21]), следует выделить два основных типа случайных блужданий: решетчатый, описанный в § 1.3, и непрерывный, описанный в § 1.4.

В решетчатом случае приходится иметь дело с производящими функциями, задаваемыми рядами Фурье, и рассматривать их аналитическое продолжение с единичной окружности; в непрерыв-

ном случае символы производящих операторов задаются на мнимой прямой и аналитически продолжаются в левую полуплоскость. В соответствии с этим в последующих главах основное внимание уделено указанным двум типам случайных блужданий.

Рассматриваемый здесь подход к изучению граничных функционалов имеет, конечно, много общего с другими известными методами, из которых наиболее общим является метод факторизации. Существенное отличие нашего метода состоит в том, что ядро интегрального оператора, обратного к производящему (потенциал), не обязательно суммируемая на полуоси функция, а лишь суммируемая в каждом конечном интервале.

Вторая особенность предлагаемого метода состоит в том, что исходный производящий оператор необратим в условиях, рассматриваемых обычно в теории линейных операторов. Этим объясняется, на первый взгляд, странное представление общего решения рассматриваемых уравнений с правой частью (см. § 1.2 формула (20)) в виде суммы частного решения, задаваемого сверткой потенциала с правой частью, и общего решения однородного уравнения, задаваемого самим потенциалом, являющимся решением однородного уравнения. Парадоксальность предлагаемой формулы (20) § 1.2 объясняется тем, что в рассматриваемых нами задачах особенность функции Грина задачи можно фиксировать в граничной точке. Такая ситуация встречается также в теории дифференциальных уравнений [7].

Глава 2

ПОТЕНЦИАЛ И РЕЗОЛЬВЕНТА СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

В этой главе строятся потенциал и резольвента на полуоси сложного пуассоновского процесса с отрицательным сносом и положительными скачками в предположении аналитичности кумулянты процесса в полуплоскости, содержащей мнимую ось.

При этих предположениях удается получить наиболее обзорные результаты благодаря тому, что для потенциала имеет место асимптотическое разложение, содержащее только три члена, позволяющее получать предельные теоремы для граничных функционалов.

Возможность построения потенциала в более общей ситуации рассматривается в заключительной седьмой главе.

Как уже указывалось, построение потенциала и резольвенты на полуоси является основной задачей при изучении случайных блужданий на полуоси. В следующей главе будет показано, что потенциал и резольвента имеют вероятностную интерпретацию в задачах о разорении. Поэтому можно считать, что в работах, в которых рассматривались задачи о разорении [18, 20], по существу, изучались потенциал и резольвента.

§ 2.1. Факторизация символа производящего оператора

В п.2 § 1.4 был определен производящий оператор K сложного пуассоновского процесса $N_t(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k - t$ соотношением

$$Ku(x) = \frac{du(x)}{dx} + a \int_0^{\infty} [u(x-y) - u(x)] dF(y). \quad (1)$$

Здесь a — параметр экспоненциального распределения интервала ξ между скачками процесса ϑ_t ; $F(x) = P\{\xi_k \leq x\}$ — функция распределения величин скачков.

Символом $K(s)$ производящего оператора служит кумулянта процесса:

$$K(s) = a(f(s) - 1) + s. \quad (2)$$

Здесь: $f(s) = Me^{-s\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x)$.

Аналитические свойства символа $K(s)$ играют основную роль в дальнейшем. Очевидно, что свойства символа определяются аналитическими свойствами преобразования Лапласа $f(s)$ функции распределения величины скачков процесса.

Будем всегда предполагать, что существует конечное математическое ожидание величины скачков:

$$m = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx < \infty. \quad (3)$$

Средний снос процесса $\lambda_1(t)$ за единицу времени определяется следующим выражением:

$$\frac{1}{t} M\lambda_1(t) = am - 1 = M\lambda_1(1). \quad (4)$$

Свойства потенциала зависят в значительной мере от знака среднего сноса. Будем различать три случая:

- 1°. $M\lambda_1(1) > 0$ — положительное течение;
- 2°. $M\lambda_1(1) < 0$ — отрицательное течение;
- 3°. $M\lambda_1(1) = 0$ — нулевое течение.

Символ $K(s)$ определен для тех s , для которых определена производящая функция скачков $f(s)$, т.е., по крайней мере, для $Re s \geq 0$. Введем обозначение:

$$s_- = \inf \{s: f(s) < \infty\}. \quad (5)$$

Символ $K(s)$ определен на полупрямой $s_- < s < +\infty$ и является выпуклой вниз функцией, так как $K''(s) = -df''(s) \geq 0$. Так что $K(s)$ может иметь не более двух нулей на интервале (s_-, ∞) . Причем один нуль всегда существует: $K(0) = 0$. Мы будем предполагать выполненными условия, при которых существует еще один корень s_0 уравнения

$$K(s_0) = 0, \quad s_- < s_0 < \infty. \quad (6)$$

Тогда оказывается, что в полуплоскости $Re s > s_-$ символ $K(s)$ не имеет других, кроме двух вещественных $s=0$ и $s=s_0$, нулей. Нули символа $K(s)$ в правой полуплоскости $Re s > s_-$ являются простыми полюсами функции $\pi(s) = 1/K(s)$ и определяют асимптотическое поведение потенциала.

Выделим нули символа, построив разложение его на множители (факторизацию).

Лемма о факторизации. При $M\lambda_1(1) > 0$ (положительное течение) символ $k(s)$ представим в виде

$$k(s) = s(s - s_0)g(s), \quad (7)$$

где

$$g(s) = \frac{\alpha}{s_0} \left[\frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} - \frac{f(s) - 1}{s} \right] = \int_0^{\infty} e^{-sx} b(x) dx; \quad (8)$$

$$b(x) = \frac{\alpha}{s_0} \int_x^{\infty} [1 - e^{-s_0(x-y)}] dF(y), \quad (9)$$

причем $s_0 > 0$ - корень уравнения (6).

Если $M\lambda_1(1) < 0$ (отрицательное течение), тогда при дополнительном условии

$$s_0 < 0, \quad k(s) > 0 \quad (10)$$

имеет место факторизация (7)-(9) с $s_0 < 0$.

Если $M\lambda_1(1) = 0$ (нулевое течение), тогда при дополнительном условии существования второго момента величины скачков

$$m_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x) < \infty$$

имеет место факторизация символа

$$k(s) = s^2 g_0(s) \quad (11)$$

с

$$g_0(s) = \alpha \frac{f(s) + ms - 1}{s^2} = \int_0^{\infty} e^{-sx} b_0(x) dx, \quad (12)$$

$$b_0(x) = \alpha \int_x^{\infty} (y-x) dF(y). \quad (13)$$

Для доказательства леммы необходимо прежде всего убедиться, что в принятых предположениях существует второй корень s_0 уравнения (6). Действительно, при $M\chi_1(1) > 0$ имеем $k'(0) = -am + 1 = -M\chi_1(1) < 0$ и $k(s) \rightarrow +\infty$ при $s \rightarrow +\infty$. Вместе с фактом $k(0) = 0$, отсюда следует существование корня $s_0 > 0$. Во втором случае, когда $M\chi_1(1) < 0$, дополнительное условие (10) гарантирует существование корня s_0 уравнения (6), удовлетворяющего условию: $s_- < s_0 < 0$. Кратность нулевого корня в случае $M\chi_1(1) = 0$ очевидна. Существование второго момента обеспечивает интегрируемость функции $\phi_0(x)$, что будет использовано в дальнейшем. На рис. 1 приведены графики $k(s)$ во всех трех случаях.

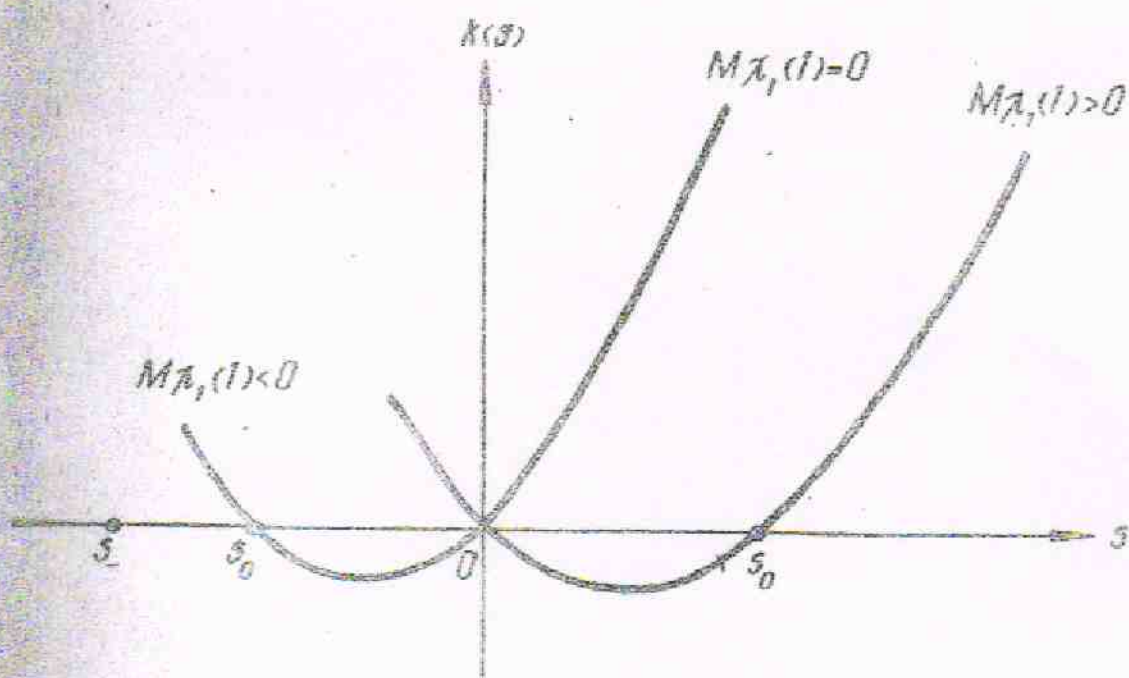


Рис. 1.

Выражения (8) и (12) для функций $g(s)$ и $g_0(s)$ проверяются непосредственно с учетом того, что $f(s_0) = 1 - s_0/a$. Последнее следует из уравнения (6) и вида символа $k(s)$ (см. (3)).

Проверим, например, формулу (7) при данной (8):

$$\begin{aligned} s(s-s_0)g(s) &= s \frac{a}{s_0} (f(s) - f(s_0)) - (s-s_0) \frac{a}{s_0} (f(s) - 1) = \\ &= -s \frac{a}{s_0} (1 - s_0/a) + af(s) + (s-s_0) \frac{a}{s_0} = \\ &= a(f(s) - 1) + s = k(s). \end{aligned}$$

Замечание. Функция $G(x)$, определяемая равенством (9), дифференцируема и удовлетворяет уравнению

$$G'(x) - s_0 G(x) = -a(1 - F(x)), \quad x \geq 0, \quad (14)$$

причем

$$G(x) = -a \int_x^{\infty} e^{s_0(x-y)} dF(y), \quad G(0) = 1. \quad (15)$$

Аналогично, имеем для функции $G_0(x)$, определяемой равенством (13),

$$G_0'(x) = -a(1 - F(x)), \quad x \geq 0; \quad G_0(0) = 1. \quad (16)$$

В дальнейшем нам понадобится ряд констант и выражений, полученных в результате факторизации символа. Для удобства ссылок приведем их все вместе.

$$g(0) = \int_0^{\infty} e^{-sx} G(x) dx = \frac{M\chi_1(1)}{s_0}; \quad g_0(0) = \frac{am_2}{2} = \frac{\sigma^2}{2};$$

$$g(s_0) = a \int_0^{\infty} x e^{-s_0 x} (1 - F(x)) dx = \mu_0; \quad (17)$$

$$g_0'(0) = \frac{am_3}{6}; \quad m_3 = \int_0^{\infty} x^3 dF(x).$$

Обратим внимание, что в качестве плотностей распределения могут быть взяты функции

$$\phi(x) = ae^{-s_0 x} (1 - F(x)) \text{ и } F_{s_0}(x) = a \int_x^{\infty} e^{-s_0(x-y)} dF(y). \quad (18)$$

Интересно было бы найти для них вероятностную интерпретацию в терминах граничных функционалов.

§ 2.2. Построение потенциала

Определим потенциал $R(x)$ случайного блуждания на полуоси $x \geq 0$, описываемого сложным пуассоновским процессом со сносом $\lambda_1(t) = \lambda(t) - t$ и с поглощением на отрицательной полуоси $x < 0$ как решение интегродифференциального уравнения

$$\lambda R(x) = \frac{dR(x)}{dx} + a \int_0^{\infty} [R(x-y) - R(x)] dF(y) = 0, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

при дополнительных условиях

$$R(x) = 0 \text{ при } x < 0; \quad R(0) = 1. \quad (2)$$

При таком определении потенциала возникает сразу вопрос, существует ли единственное решение задачи (1)-(2). В условиях, при которых имеет место приведенная в § 2.1 факторизация спектра, ответ на этот вопрос положительный, более того, мы построим асимптотическое представление потенциала, полезное при изучении предельного поведения граничных функционалов.

Теорема 1. В условиях леммы о факторизации (§ 2.1) потенциал $R(x)$ определяется единственным образом следующими соотношениями:

при наличии течения ($M\lambda_1(1) \neq 0$):

$$R(x) = -\frac{1}{M\lambda_1(1)} [1 - Re^{s_0 x} - V(x)], \quad (3)$$

при отсутствии течения ($M\lambda_1(1) = 0$):

$$R(x) = \frac{2}{\sigma^2} [x - R_0 - V_0(x)]. \quad (4)$$

Здесь постоянная R , известная под названием константы Крамера [21], задается в виде

$$R = \frac{g(0)}{g(s_0)}; \quad R_0 = \frac{g'_0(0)}{g_0(0)}. \quad (5)$$

Функции $V(x)$ и $V_0(x)$, называемые погранслоями, определяются своими преобразованиями Лапласа ($Res \geq 0$):

$$v(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} V(x) dx = \frac{1}{g(s)} \left[\frac{g(s) - g(0)}{s} - R \frac{g(s) - g(s_0)}{s - s_0} \right], \quad (6)$$

$$v_0(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} V_0(x) dx = \frac{1}{g_0(s)} \left[\frac{g_0(s) - s g'_0(0) - g_0(0)}{s^2} - R_0 \frac{g_0(s) - g_0(0)}{s} \right]. \quad (7)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что факторизация символа $K(s)$ оператора K , приведенная в лемме § 2.1, позволяет факторизовать оператор K в виде

$$K = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} - s_0 \right] \mathcal{E} \quad \text{при } M_{\mathcal{K}_1}(1) \neq 0, \quad (8)$$

или

$$K = \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{E}_0 \quad \text{при } M_{\mathcal{K}_1}(1) = 0, \quad (9)$$

где \mathcal{E} и \mathcal{E}_0 — интегральные операторы типа свертки с ядрами $\mathcal{E}(x)$ и $\mathcal{E}_0(x)$ соответственно:

$$\mathcal{E}u(x) = \int_0^{\infty} u(x-y)\mathcal{E}(y)dy; \quad \mathcal{E}_0u(x) = \int_0^{\infty} u(x-y)\mathcal{E}_0(y)dy. \quad (10)$$

Множители в (8) и (9) коммутируют, если рассматривать оператор K на функциях, заданных на всей вещественной оси.

Факторизация оператора (8) позволяет искать решение уравнения (1) в условиях (2) в виде

$$[R(x) - 1 - Re^{s_0 x} - V(x)], \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (11)$$

где погранслоем $V(x)$ определим из уравнения

$$\mathcal{E}V(x) = \int_0^{\infty} V(x-y)\mathcal{E}(y)dy = 0, \quad x \geq 0 \quad (12)$$

с условием

$$V(x) = 1 - Re^{s_0 x}, \quad x < 0, \quad (13)$$

обеспечивающим выполнение первого из условий (2). Константа Крамера R здесь определяется из условия разрешимости задачи (12)–(13), которое можно записать в виде

$$0 = \int_0^{\infty} V(-y)G(y)dy = \int_0^{\infty} (1 - Re^{-s_0 y})G(y)dy = g(0) - Rg(s_0),$$

отсюда получаем первое из соотношений (5).

Теперь решим уравнение (12) в условиях (13), применяя преобразование Лапласа. Сначала запишем уравнение (12) в виде

$$\int_0^x V(x-y)G(y)dy = - \int_x^{\infty} [1 - Re^{s_0(x-y)}]G(y)dy. \quad (14)$$

Затем, применяя преобразование Лапласа к уравнению (14), получим (6).

Для определения нормирующего множителя G в (11) найдем $V(+0)$. Для этого перепишем уравнение (14) в таком виде:

$$\int_0^x G(x-y)V(y)dy = - \int_x^{\infty} (1 - Re^{s_0(x-y)})G(y)dy. \quad (15)$$

Учитывая, что функция $G(x)$ дифференцируема (см. замечание в 2.1) и $G(0) = 1$, находим после дифференцирования обеих частей равенства (15):

$$V(x) + \int_0^x G'_x(x-y)V(y)dy = (1-R)G(x) + Rs_0 \int_x^{\infty} e^{s_0(x-y)}G(y)dy.$$

Пологая $x = +0$, получаем с учетом (5):

$$V(+0) = 1 - R + Rs_0 g(s_0) = 1 - R + s_0 g(0). \quad (16)$$

Таким образом, имеем с учетом (17) § 2.1:

$$CR(+0) = 1 - R - V(+0) = -s_0 g(0) = -M_{X_1}(1).$$

Откуда, учитывая нормирующее условие (2), имеем

$$C = -\frac{1}{M\chi_1(t)}, \quad (17)$$

что вместе с (11) дает (3).

Аналогично, при $M\chi_1(t) = 0$ ищем потенциал $R_0(x)$ в виде

$$CR_0(x) = x - R_0 - V_0(x), \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (18)$$

где погранслои $V_0(x)$ определяется из уравнения

$$C_0 V_0(x) = \int_0^{\infty} V_0(x-y) \epsilon_0(y) dy = 0, \quad x \geq 0 \quad (19)$$

при дополнительном условии:

$$V_0(x) = x - R_0, \quad x < 0, \quad (20)$$

в котором константа Крамера R_0 определяется из условия разрешимости задачи (19)–(20), т.е. должно выполняться следующее соотношение:

$$0 = \int_0^{\infty} V_0(y) \epsilon_0(y) dy = \int_0^{\infty} (-R_0 - y) \epsilon_0(y) dy - R_0 g_0(0) + g_0'(0), \quad (21)$$

откуда получаем второе соотношение в (5).

Далее, записывая уравнение (19) в виде

$$\int_0^x \epsilon_0(x-y) V_0(y) dy = - \int_x^{\infty} (x-y-R_0) \epsilon_0(y) dy \quad (22)$$

и применяя преобразование Лапласа, получим (7).

Для определения нормирующего множителя C в (18) после дифференцирования (22) полагаем $x = +0$:

$$V_0(+0) = -R_0 - g_0(0). \quad (23)$$

Теперь из (18) с учетом нормирующего условия (2) и формулы (17) § 2.1, получаем $C = \frac{C^2}{2}$, что вместе с (18) приводит к (14).

Единственность решения задачи (1)–(2) в классе один раз дифференцируемых функций, заданных на положительной полуоси и непрерывных справа в нуле, докажем от противного. Пусть существует другое решение $\Phi(x)$ задачи (1)–(2). Тогда функция $\Omega(x) = \Phi(x) - R(x)$ удовлетворяет уравнению (1) с

дополнительным условием: $\Omega(x) = 0, x \leq 0$. Введем функцию $\Omega_1(x) = \mathcal{L}^{-1} \Omega(x) = \int_0^x \mathcal{L}^{-1} \Omega(y) dy$. Учитывая дифференцируемость $\mathcal{L}^{-1} \Omega(x)$ и $\Omega_1(x)$, получаем, что функция $\Omega_1(x)$ дважды дифференцируема. Используя факторизацию оператора $\mathcal{L}^{-1} \Omega(x)$, получаем

$$\frac{d^2 \Omega_1(x)}{dx^2} - s_0 \frac{d\Omega_1(x)}{dx} = 0, x \geq 0; \Omega_1(0) = 0, \Omega_1'(0) = 0. \quad (24)$$

Следовательно, $\Omega_1(x) = 0$. В силу неотрицательности ядра $\mathcal{L}^{-1} \Omega(x)$ отсюда следует, что и $\Omega(x) = 0$, т.е. $\Phi(x) = R(x)$. Решение задачи (1)-(2) единственно.

Выражения (6) и (7) для преобразований Лапласа пограничных трудны для обращения, так как в них входит функция $g^{-1}(s)$. Поэтому желательно иметь другое представление пограничных, более удобное для обращения. Оказывается, такое выражение можно получить, используя плотность восстановления.

Следствие. Погранслой $V(x)$ в (6) при наличии течения ($M\lambda_1(1) \neq 0$) можно представить в виде

$$V(x) = M\lambda_1(1) \int_x^\infty e^{-s_0(x-y)} W(y) dy, \quad (25)$$

где функция $W(x)$ имеет преобразование Лапласа в следующем виде:

$$w(s) = \frac{f_{s_0}(s)}{1 - f_{s_0}(s)} = \frac{1}{sg(0)}; f_{s_0}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} F_{s_0}(x) dx = -a \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}. \quad (26)$$

Погранслой $V_0(x)$ в (7) представим в виде

$$V_0(x) = g_0(0) \int_x^\infty W_0(y) dy. \quad (27)$$

где функция $W_0(x)$ имеет преобразование Лапласа в виде

$$w_0(s) = \frac{f_0(s)}{1 - f_0(s)} = \frac{1}{sg_0(0)}; f_0(s) = \frac{1}{m} \int_0^\infty e^{-sx} (1 - F(x)) dx = \frac{1 - f(s)}{ms}. \quad (28)$$

Для доказательства формул (25)-(28) можно идти двумя путями. Либо преобразовать (6) и (7) к виду (25) и (27) соответственно, либо на (25) и (27) получить (6) и (7). Воспользуемся вторым путем. Найдем преобразование Лапласа по-

грансля $V(x)$; заданного формулами (25) и (26). Из (25) имеем

$$v(s) = M\chi_1(l) \frac{w(s) - w(s_0)}{s - s_0}. \quad (29)$$

Преобразуем выражение (26) для $w(s)$, учитывая соотношение (см. (17) § 2.1):

$$f_{s_0}(s) = -\alpha \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} = 1 - sg(s). \quad (30)$$

Имеем

$$w(s) = \frac{1 - sg(s)}{sg(s)} - \frac{1}{sg(0)} = \frac{1}{sg(s)} - \frac{1}{sg(0)} - 1. \quad (31)$$

Теперь, подставляя (31) в (29) и используя равенство $M\chi_1(l) = s_0 g(0)$, находим

$$v(s) = g(0) \frac{s_0 g(s_0) - sg(s)}{(s - s_0) sg(s) g(s_0)} + \frac{1}{s}. \quad (32)$$

Добавляя и вычитая в числителе первого слагаемого (32) $sg(s)$, получаем

$$\begin{aligned} v(s) &= g(0) \frac{g(s_0) - g(s)}{(s - s_0) g(s) g(s_0)} - \frac{g(0)'}{sg(s)} + \frac{1}{s} = \\ &= \frac{1}{g(s)} \left[\frac{g(s) - g(0)}{s} - \frac{g(0)}{g(s_0)} \frac{g(s) - g(s_0)}{s - s_0} \right], \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (6) с учетом (5).

Аналогично, в случае $M\chi_1(l) = 0$ ($am = 1$) используем формулу $f_0(s) = 1 - sg_0(s)$ (см. (17) § 2.1) и преобразовываем (27) с учетом (28) к виду (7), либо, наоборот, исходя из вида погрансля (7), приходим к (27).

§ 2.3. Свойства потенциала

Из среднезначного потенциала и представления его, полученного в теореме 1 в § 2.2, следует любопытный факт: только

при $M\lambda_1(l) < 0$ (отрицательное течение) потенциал является ограниченной для всех $x \geq 0$ функцией.

Если же $M\lambda_1(l) \geq 0$, то потенциал является растущей к $x \rightarrow \infty$ функцией; при $M\lambda_1(l) = 0$ — линейно, при $M\lambda_1(l) > 0$ — рост экспоненциальный. Здесь уместно провести аналогию с теорией уравнения восстановления. Решение уравнения восстановления определяется функцией восстановления, имеющей линейный рост на бесконечности. В нашем случае для интегродифференциального оператора K вида (1) в 2.2 ядро потенциала может расти и экспоненциально. Отметим, что в книге В.Феллера [21, гл. XI, § 7] указывается, что в связи с задачами для интегродифференциального оператора K используется представление R , удовлетворяющее уравнению $KR = 0$ и что "рассматриваемый процесс имеет смысл только при $M\lambda_1(l) < 0$, так как в противном случае $R = 0$ ". На самом деле оказывается, что при $M\lambda_1(l) \geq 0$ уравнение (1) в 2.2, имеет решение, но уже не в классе функций распределения, а в классе функций восстановления, допускающих рост.

При этом возникает парадоксальная ситуация (как будет видно из дальнейшего), что невырожденные граничные функционалы на траектории сложного пуассоновского процесса определяются с помощью потенциала, имеющего рост на бесконечности.

Итак, из представления потенциала (3), (4) § 2.2, приведенного в теореме, можно получить асимптотическое поведение его на бесконечности.

Свойство 1. При $M\lambda_1(l) > 0$ ($s_0 > 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-s_0 x} R(x) = \frac{1}{s_0 \mu_0}; \quad (1)$$

при $M\lambda_1(l) < 0$ ($s_0 < 0$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = -\frac{1}{M\lambda_1(l)}; \quad (2)$$

при $M\lambda_1(l) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R_D(x)/x = \frac{2}{G^2}. \quad (3)$$

Разумеется, что указанное асимптотическое поведение имеет место в условиях, сформулированных в лемме о фактори-

зации (см. § 2.1). Чтобы убедиться в справедливости соотношений (1)-(3) достаточно заметить, что погранслои $V(x)$ и $V_0(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Последнее вытекает из представления погранслоев (25) и (27), приведенного в следствии из теоремы § 2.2.

Свойство 1 потенциала будет использовано при доказательстве предельных теорем для распределений граничных функционалов в следующей главе.

Как уже указывалось, главная цель введения потенциала решение уравнения вида $Ku = \varphi$ на полуоси $x \geq 0$.

Свойство 2. Функция

$$U(x) = \int_0^x R(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению

$$KU(x) = \frac{dU(x)}{dx} + a \int_0^\infty [U(x-y) - U(x)]d\tau(y) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (5)$$

при условии

$$U(x) = 0, \quad x < 0 \quad (6)$$

для любой функции $\varphi(x)$, интегрируемой в каждом конечном интервале.

Для доказательства утверждения нужно применить оператор K к правой части (4) и воспользоваться определением потенциала (см. (1), (2) § 2.2). После простых преобразований получаем

$$K \left[\int_0^x R(x-y)\varphi(y)dy \right] = \varphi(x) + \int_0^x \varphi(x-y)KR(y)dy, \quad (7)$$

откуда и следует (5).

Из основного свойства 2 потенциала следует важный для всего дальнейшего вывод.

Свойство 3. Общее решение уравнения (5) с условием (6) представимо в стандартной форме:

$$U(x) = C R(x) + \int_0^x R(x-y)\varphi(y)dy, \quad (8)$$

где C - произвольная постоянная.

Это свойство и будет систематически использовано при изучении граничных функционалов в гл. 3.

В § 1.2 на простейшем примере бернуллиевского случайного блуждания был сформулирован алгоритм обращения производящего оператора на полуоси путем аналитического продолжения символа оператора, рассматриваемого на всей оси.

Оставляя этот путь до гл. 4, где будет рассмотрено решетчатое случайное блуждание, здесь мы укажем на связь приведенного в § 2.2 определения потенциала как решения однородного уравнения на полуоси с аналитическим продолжением символа.

Свойство 4. Преобразование Лапласа $r(\lambda)$ потенциала $R(x)$ представимо в виде

$$r(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} R(x) dx = \frac{1}{k(s)}, \quad \operatorname{Re} s > \max(0, s_0). \quad (9)$$

здесь $k(s) = a(f(s) - 1) + s$ — символ производящего оператора (см. § 2.1).

Для доказательства (9) можно вычислить $r(s)$, исходя из представления потенциала (3)–(7) § 2.2, т.е. проверить справедливость разложения при $M\chi_1(1) \neq 0$

$$\frac{1}{k(s)} = \frac{1}{M\chi_1(1)} \left[\frac{1}{s} - \frac{R}{s-s_0} - v(s) \right], \quad (10)$$

и разложения при $M\chi_1(1) = 0$

$$\frac{1}{k(s)} = \frac{2}{\sigma^2} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{R_0}{s} - v_0(s) \right]. \quad (11)$$

Замечание. Свойство 4 может быть принято за определение потенциала. Такой подход будет обсужден нами в гл. 7.

В случае $M\chi_1(1) \leq 0$ свойство 4 позволяет получить другое представление потенциала в виде функции восстановления абсолютно непрерывного распределения, дефектного при $M\chi_1(1) < 0$.

Свойство 5. При $M\chi_1(1) \leq 0$

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_q^{n*}(x), \quad x \geq 0, \quad (12)$$

где

$$F_q(x) = a \int_0^x [1 - F(y)] dy \quad \text{с} \quad F_q(+\infty) = am = q \leq 1. \quad (13)$$

Действительно, учитывая вид символа $k(s)$, имеем

$$\frac{1}{k(s)} = \frac{1}{\alpha(f(s)-1)+\epsilon} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-\alpha \frac{1-f(s)}{s}} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-f_q(s)} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} f_q^n(s),$$

учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dR(x) = s \int_0^{\infty} e^{-sx} R(x) dx = \frac{s}{k(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_q^n(s), \quad (14)$$

получаем представление (12), которое можно использовать для приближенного вычисления потенциала при малых $q = \alpha m < 1$.

Замечание. Свойства 4 и 5 потенциала позволяют ввести потенциал в случае $M\chi_1(1) \leq 0$, не предполагая выполненным ограничение (10) § 2.1, из которого следует удобное для асимптотического анализа представление (3) § 2.2. В этом случае следует использовать асимптотические свойства функции восстановления распределения, т.е. представление (12).

§ 2.4. Резольвента и ее свойства

Для решения более общих уравнений вида $Ku - \lambda u = \varphi$ введем резольвенту $R_\lambda(x)$ случайного блуждания на полуоси $x \geq 0$ соотношением

$$R_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R^{(n+1)*}(x), \quad x \geq 0. \quad (1)$$

Здесь

$$R^{(n+1)*}(x) = \int_0^x R^{n*}(x-y) R(y) dy, \quad n \geq 1. \quad (2)$$

Нетрудно убедиться в том, что ряд (1) сходится равномерно по x в каждом конечном интервале и определяет функцию, аналитическую по λ при фиксированном x .

Свойства резольвенты вытекают из следующего соотношения:

$$R_\lambda(x) = R(x) + \lambda \int_0^x R(x-y) R_\lambda(y) dy. \quad (3)$$

Свойство 1. Резольвента удовлетворяет уравнению

$$KR_\lambda(x) - \lambda R_\lambda(x) = \frac{dR_\lambda(x)}{dx} + \alpha \int_0^{\infty} [R_\lambda(x-y) - R_\lambda(x)] dF(y) - \lambda R_\lambda(x) = 0, \quad (4)$$

$x \geq 0$

с условием

$$R_{\lambda}(x) = 0 \quad \text{при } x < 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) следует из соотношения (3) и основного свойства 2 потенциала (см. § 2.3).

Свойство 2. Функция

$$\Phi_{\lambda}(x) = \int_0^x R_{\lambda}(x-y)\varphi(y)dy, \quad x \geq 0 \quad (6)$$

удовлетворяет уравнению

$$K\Phi_{\lambda}(x) - \lambda\Phi_{\lambda}(x) = \varphi(x), \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Действительно, с учетом (3) функция (6) удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{\lambda}(x) = \int_0^x R(x-y)\varphi(y)dy - \lambda \int_0^x R(x-y)\Phi_{\lambda}(y)dy. \quad (8)$$

Применение оператора K к правой части (8) дает (7).

Свойство 3. Преобразование Лапласа $r_{\lambda}(s)$ резольвенты $R_{\lambda}(x)$ по x представимо в виде

$$r_{\lambda}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} R_{\lambda}(x) dx = \frac{1}{k(s) - \lambda}, \quad \text{Re } s > \max(0, s_0). \quad (9)$$

Формула (9) может быть получена из определения резольвенты (1) почленным интегрированием ряда либо из соотношения (3).

Формула (9) может быть принята за определение резольвенты. При этом возникает вопрос об обращении преобразования Лапласа по s , для чего может быть использовано разложение

$$\frac{1}{k(s) - \lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n r^{n+1}(s); \quad r(s) = \frac{1}{k(s)}. \quad (10)$$

Приведенные свойства резольвенты позволяют сформулировать основное свойство резольвенты, дающее представление общего решения уравнения (7).

Свойство 4. Общее решение $\Phi_{\lambda}(x)$ уравнения (7) представимо в виде

$$\Phi_{\lambda}(x) = C_{\lambda} R_{\lambda}(x) + \int_0^x R_{\lambda}(x-y)\varphi(y)dy, \quad (11)$$

где C_λ — произвольная функция от λ , независимая от x .

Тот факт, что правая часть (11) является решением уравнения (7) следует из предыдущих свойств резольвенты. Единственность такого представления следует из того, что общее решение однородного уравнения

$$\mathcal{K}U - \lambda U = 0 \quad \text{при} \quad u(0) = 0 \quad (12)$$

представимо в виде (см. § 2.2):

$$U(x) = C_\lambda R(x) + \lambda \int_0^x R(x-y)u(y)dy. \quad (13)$$

Дополнительное условие $U(0) = 0$ с учетом нормирующего условия для потенциала $R(0) = 1$ приводит к заключению $C = 0$. Отсюда итерация соотношения (13) (при $C = 0$) дает $U = 0$.

Свойство 5. Резольвента $R_\lambda(x)$ удовлетворяет известному резольвентному уравнению

$$R_\lambda(x) - R_\mu(x) = (\lambda - \mu) \int_0^x R_\lambda(x-y)R_\mu(y)dy. \quad (14)$$

Соотношение (14) получаем, применяя оператор \mathcal{K} к свертке $R_\lambda * R_\mu$ с учетом свойства 2:

$$\mathcal{K}[R_\lambda * R_\mu] = \lambda R_\lambda * R_\mu + R_\mu = \mu R_\mu * R_\lambda + R_\lambda. \quad (15)$$

Второе равенство и дает (14).

Применение резольвенты в граничных задачах основано на свойствах резольвенты и ее представлении (1) и (3) через потенциал. Представление (3) позволяет использовать асимптотическое представление потенциала, приведенное в § 2.2.

Вместе с тем желательно, конечно, иметь непосредственно асимптотическое представление резольвенты. Кроме того, свойство 3 резольвенты означает, что существует определенная связь резольвенты с одномерными распределениями процесса, так как известно [5, стр. 419], что кумулянта процесса с независимыми приращениями связана с одномерными распределениями процесса формулой

$$\frac{1}{\lambda - k(-iz)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dx \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} F_t(x) dt \quad (\text{Im } z = 0), \quad (16)$$

где

$$F_t(x) = P\{N_1(t) \leq x\}.$$

На первый взгляд (9) и (16) совпадают. Однако это не так, поскольку в (16) равенство имеет место на мнимой оси, в то время как в (9) соотношение выполняется в правой полуплоскости $Re s > \max(0, s_0)$. Преобразование Лапласа резольвенты $r_\lambda(s)$ получается аналитическим продолжением функции $[\lambda - k(-ix)]^{-1}$ с мнимой оси в правую полуплоскость. При этом в полуплоскости $Re s > 0$ у функции $r_\lambda(s)$ имеется полюс. Действительно, нетрудно заметить, что на выпуклости функции $k(s)$ при $s \gg 0$ следует существование единственного положительного корня $s(\lambda)$ уравнения

$$k(s(\lambda)) = \lambda \quad (17)$$

при всех вещественных $\lambda \geq 0$.

Свойство 6. Резольвента $R_\lambda(s)$ представима в следующем виде (при $\lambda > 0$):

$$R_\lambda(x) = s'(\lambda) e^{s(\lambda)x} - \frac{d}{dx} \int_0^\infty e^{-xt} P\{x_1(t) \leq x\} dt. \quad (18)$$

В частности,

$$\int R_\lambda(y) dy = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)} e^{s(\lambda)x} - \int_0^x e^{-xt} P\{x_1(t) \leq x\} dt. \quad (19)$$

Для доказательства представления (18) введем функцию

$$r_\lambda^0(s) = \frac{1}{k(s) - \lambda} - \frac{s'(\lambda)}{s - s(\lambda)}, \quad (20)$$

аналитическую в правой полуплоскости $Re s \gg 0$.

Следовательно,

$$r_\lambda^0(x) = \int_0^\infty e^{-sx} R_\lambda^0(x) dx = \int_0^\infty e^{-sx} [R_\lambda(x) - s'(\lambda) e^{s(\lambda)x}] dx. \quad (21)$$

Далее, введем функции

$$p_\lambda^-(x) = \begin{cases} \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)} e^{s(\lambda)x}, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$f_{\lambda}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f_t(x) dt. \quad (23)$$

Рассмотрим функцию

$$f_{\lambda}^0(x) = \rho_{\lambda}^-(x) - f_{\lambda}(x), \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (24)$$

для которой с учетом (16) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} d_x f_{\lambda}^0(x) = r_{\lambda}^0(-iz). \quad (25)$$

Следовательно,

$$f_{\lambda}^0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \leq 0. \quad (26)$$

Отсюда, во-первых, выводим, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \rho\{\chi_1(t) \leq x\} dt = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)} e^{s(\lambda)x}, \quad x \leq 0 \quad (27)$$

и, во-вторых, сравнивая (21) и (25) с учетом (22), приходим к представлению (18). Формула (19) проверяется непосредственно с учетом (27).

В качестве следствия из свойства 6 предельным переходом при $\lambda \rightarrow +0$ получаем представление потенциала через одномерные распределения процесса.

Следствие 1. В условиях леммы о факторизации (§ 2.1) имеют место следующие соотношения:

при $M\chi_1(1) > 0$:

$$R(x) = \frac{e^{s_0 x}}{s_0 \mu_0} - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho\{\chi_1(t) \leq x\} dt; \quad (27)$$

при $M\chi_1(1) < 0$:

$$R(x) = -\frac{1}{M\chi_1(1)} - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho\{\chi_1(t) \leq x\} dt; \quad (28)$$

при $M\chi_1(1) = 0$:

$$R(x) = \frac{2x}{\sigma^2} - \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho\{\chi_1(t) \leq x\} dt. \quad (29)$$

Первые два соотношения (27) и (28) следуют из того, что при $M\lambda_1(l) > 0$ $\lim_{\lambda \rightarrow +0} s(\lambda) = s(+0) = s_0 > 0$;

при $M\lambda_1(l) < 0$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} s(\lambda) = 0. \quad (30)$$

Для доказательства (29) следует воспользоваться асимптотическим представлением корня $s(\lambda)$ уравнения (17) при $\lambda \rightarrow +0$ и $M\lambda_1(l) = 0$:

$$s(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{\delta^2} + \frac{am_3}{\delta} \left(\frac{\sqrt{2\lambda}}{\delta} \right)^3 + O(\lambda^{5/2}). \quad (31)$$

Сравнивая основное представление потенциала (3) и (4) с приведенным в (27)–(29), получаем.

Следствие 2. Имеют место следующие соотношения:

$$\int_0^l \rho(\lambda_1(t) < x) dt = \begin{cases} \frac{1}{M\lambda_1(l)} [1 - V(x)], & M\lambda_1(l) > 0; \\ -\frac{1}{M\lambda_1(l)} [Re^{s_0 x} + V(x)], & M\lambda_1(l) < 0; \\ \frac{2}{\delta^2} [V_0(x) - R_0], & M\lambda_1(l) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

В заключение перечислим свойства корня $s(\lambda)$ уравнения (17), которые будут использованы в дальнейшем:

$$s'(\lambda) = \frac{1}{1 + \alpha f'(s_\lambda)};$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{s_0 \alpha_0}, & M\lambda_1(l) > 0 \\ \infty, & M\lambda_1(l) = 0 \\ \frac{1}{M\lambda_1(l)}, & M\lambda_1(l) < 0. \end{cases} \quad (33)$$

Глава 3

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

В этой главе рассматриваются различные граничные функционалы от траекторий сложного пуассоновского процесса при наличии одного поглощающего экрана либо двух поглощающих границ, либо одного поглощающего и одного задерживающего экрана.

При этом для искомым распределений или производящих функций строятся интегродифференциальные уравнения вида $Ku = \varphi$ либо $Ku - \lambda u = \varphi$. Решения этих уравнений представляются в стандартной форме $C\mathcal{R} + R_0 * \varphi$ либо $C_\lambda \mathcal{R}_\lambda + R_\lambda * \varphi$. Из дополнительных вероятностных или аналитических соображений определяются параметры решения C или C_λ . Свойства потенциала \mathcal{R} и резольвенты \mathcal{R}_λ , приведенные в гл. 2, позволяют получить предельные (при $\lambda \rightarrow \infty$) теоремы для рассматриваемых граничных функционалов.

Подчеркнем еще раз, что основной аналитический аппарат изложен в гл. 2. В данной главе задачи сводятся к построению исходных уравнений и анализу полученных решений с использованием свойств потенциала и резольвенты.

Напомним, что мы рассматриваем здесь случайное блуждание, описываемое сложным пуассоновским процессом:

$$X_1(t) = X(t) - t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k - t, \quad t \geq 0,$$

в котором ξ_k — величины скачков процесса с функцией распределения $F(x) = P\{\xi_k \leq x\}$, N_t — простейший пуассоновский процесс с параметром α , т.е. интервалы между скачками процесса $X_1(t)$ — случайные величины ξ_k с показательным распределением: $P\{\xi_k > t\} = e^{-\alpha t}$.

Изучению граничных функционалов от сложного пуассоновского процесса посвящена обширная литература. Достаточно полная библиография работ, опубликованных до 1966 г., приведена в книге Л. Такача [20]. В нашем списке литературы дополнительно приведены работы, относящиеся непосредственно к данной тематике.

§ 3.1. Распределение максимума пуассоновского процесса

Известно [3], что при $M\lambda_1(t) < \infty$ существует собственная случайная величина

$$\bar{x} = \sup_{t \geq 0} \lambda_1(t). \quad (1)$$

Введем случайное событие

$$T_x = \{\bar{x} \leq x\}. \quad (2)$$

Для индикатора этого события $I(T_x)$ имеет место следующее стохастическое соотношение* :

$$I(T_x) = I(x - \xi < \lambda_1; T_{x-\xi+\xi}), \quad x \geq 0; \quad I(T_x) = 0, \quad x < 0. \quad (3)$$

Переходя к математическим ожиданиям в (3), после простой замены переменных, получаем

$$M I(T_x) = W(x) = a \int_x^\infty e^{-a(y-x)} dy \int_0^y W(y-z) dF(z). \quad (4)$$

Следует отметить дифференцируемость $W(x)$, так что с учетом того, что $W(x) = 0$ при $x < 0$ (см. (3)) получаем уравнение

$$\frac{dW(x)}{dx} + a \int_0^\infty [W(x-y) - W(x)] dF(y) = 0, \quad x \geq 0 \quad (5)$$

с дополнительными условиями:

$$W(x) = 0, \quad x < 0; \quad W(+\infty) = 1. \quad (6)$$

Следовательно, учитывая определение потенциала (§ 2.2), следует

$$W(x) = CR(x). \quad (7)$$

* Равенство между случайными величинами понимается, как равенство их функций распределения.

Константа C находится из нормирующего условия (6) с учетом свойства 1 потенциала (§ 2.3):

$$R(+\infty) = -\frac{1}{M\lambda_1(1)}$$

Таким образом, окончательно приходим к следующей интересной и важной формуле:

$$R(x) = -\frac{1}{M\lambda_1(1)} P\left\{ \sup_{t \geq 0} \lambda_1(t) \leq x \right\}. \quad (8)$$

С точностью до постоянного множителя потенциал совпадает с распределением максимума процесса на всем временном интервале при условии, что $M\lambda_1(1) < 0$ (отрицательное течение).

Теперь понятна исключительная роль распределения максимума процесса (когда он существует) при изучении граничных функционалов [3, 20].

Заметим, что формулу (8) можно принять за определение потенциала при $M\lambda_1(1) < 0$. При таком определении известные свойства распределения максимума процесса могут быть использованы в качестве свойств потенциала.

Отметим еще одно важное обстоятельство. Нетрудно убедиться в том, что уравнение (4) — уравнение для инвариантной меры случайного блуждания на полупрямой $[0, \infty)$ со скачками $\xi_A - \xi_A$ и задерживающим экраном в нуле [3, стр. 136], причем эта инвариантная мера совпадает со стационарным распределением рассматриваемого сложного пуассоновского процесса на полуоси $[0, \infty)$ с задерживающим экраном в нуле (см. § 3.7). Так что при наличии отрицательного течения ($M\lambda_1(1) < 0$) потенциал определяется стационарной мерой $W(x)$. Это обстоятельство используется в приложениях сложных пуассоновских процессов, например, в теории массового обслуживания и др.

В заключение укажем, что схема рассуждений, приведенных в настоящем параграфе, является стандартной схемой, применяемой в последующих параграфах данной главы для вывода уравнений для распределений и производящих функций граничных функционалов.

§ 3.2. Момент достижения положительного уровня

В приложениях сложных пуассоновских процессов к анализу стохастических систем важной характеристикой является время достижения положительного уровня $x > 0$ процессом $X_1(t)$. Введем момент достижения уровня

$$\tau^x = \inf\{t > 0: X_1(t) \geq x\}. \quad (1)$$

Этот граничный функционал определяет другой важный функционал на траекториях пуассоновского процесса — максимальное значение процесса на конечном временном интервале. Введем

$$\bar{X}_1(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} X_1(u). \quad (2)$$

Существует связь между распределениями τ^x и $\bar{X}_1(t)$:

$$P\{\tau^x > t\} = P\{\bar{X}_1(t) < x\}. \quad (3)$$

Так что, зная распределение одного из введенных функционалов (1) или (2), мы тем самым получаем распределение другого, устанавливая связь (3).

Теорема 1. Для производящей функции момента достижения положительного уровня x процессом $X_1(t)$ имеет место представление при $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

$$M e^{-\lambda \tau^x} = 1 - \lambda [R_N(x) s^{-1}(\lambda) - \int_0^x R_N(y) dy]. \quad (4)$$

В частности,

$$M e^{-\lambda \tau^0} = 1 - \frac{\lambda}{s(\lambda)}. \quad (5)$$

Здесь $s(\lambda)$ — корень уравнения (см. (17) § 2.4)

$$K(s(\lambda)) = \lambda, \quad \lambda > 0. \quad (6)$$

Доказательство. Для момента достижения положительного уровня x имеют место следующие стохастические соотношения:

$$\tau^x = \tau + e^{-\lambda(\tau - \tau^x)}, \quad x \geq 0; \quad \tau^x = 0, \quad x < 0. \quad (7)$$

Действительно (рис.2), до первого скачка процесса $X_t(t)$ проходит время τ , после чего, в силу строгой марковости процесса, происходит достижение уровня x процессом $X_t(t + \tau)$ с началом в точке $X_t(\tau) = \tau - \tau$, или, что то же самое — происходит достижение уровня $x + \tau - \tau$ процессом $X_t(t)$ с началом в нуле. Дополнительное условие: $\tau^x = 0$ при $x < 0$ очевидно. Это условие учитывает также возможность достижения уровня x в момент первого скачка процесса.

Используя стохастическое соотношение (7), построим интегродифференциальное уравнение для производящей функции момента достижения положительного уровня:

$$\Phi_\lambda(x) = M e^{-\lambda \tau^x}. \quad (8)$$

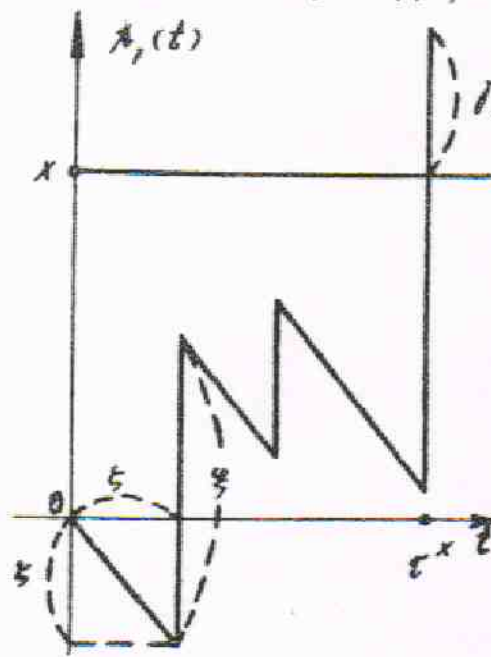
Имеем (см. (7)):

$$\Phi_\lambda(x) = M \exp[-\lambda(\tau + e^{-\lambda(\tau - \tau^x)})] = \alpha \int_0^\infty e^{-(\alpha + \lambda)u} du \int_0^\infty \Phi_\lambda(x + u - z) dF(z).$$

Или иначе после замены переменных $x + u = y$:

$$\Phi_\lambda(x) = \alpha \int_x^\infty e^{-(\alpha + \lambda)(y - x)} dy \int_0^\infty \Phi_\lambda(y - z) dF(z). \quad (9)$$

Отсюда следует дифференцируемость функции $\Phi_\lambda(x)$ по x . После дифференцирования по x с учетом (9) приходим к следующему интегродифференциальному уравнению для $\Phi_\lambda(x)$:



$$\frac{d\Phi_\lambda(x)}{dx} + \alpha \int_0^\infty \Phi_\lambda(x - y) dF(y) - (\alpha + \lambda) \Phi_\lambda(x) = 0. \quad (10)$$

При этом из (7) следует $\Phi_\lambda(x) = 1$ при $x < 0$. (11)

Заметим, что

$$\Phi_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t P\{\tau^x < t\} = 1 - \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P\{\tau^x > t\} dt. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$\psi_{\lambda}(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p\{\tau^x \geq t\} dt \quad (13)$$

и заменим в уравнении (10) $\varphi_{\lambda}(x)$ на $\psi_{\lambda}(x)$ с учетом (12).
Получим для $\psi_{\lambda}(x)$ уравнение в стандартной форме:

$$\frac{d\psi_{\lambda}(x)}{dx} + \alpha \int_0^{\infty} [\psi_{\lambda}(x-y) - \psi_{\lambda}(x)] dF(y) - \lambda \psi_{\lambda}(x) = -1, \quad x \geq 0 \quad (14)$$

при дополнительном условии

$$\psi_{\lambda}(x) = 0 \quad \text{при } x < 0, \quad (15)$$

которое вытекает из (11) и (12).

Теперь решение задачи (14)–(15) представимо через резольвенту в стандартной форме (см. § 2.4):

$$\psi_{\lambda}(x) = C_{\lambda} R_{\lambda}(x) - \int_0^x R_{\lambda}(y) dy. \quad (16)$$

Параметр C_{λ} , зависящий от λ , определяется из начального условия

$$\psi_{\lambda}(0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p\{\tau^0 \geq t\} dt = C_{\lambda}. \quad (17)$$

Здесь τ^0 – момент первого вхождения процесса $X_1(t)$ ($t > 0$) на полуось $[0, +\infty)$.

Для определения C_{λ} перейдем в (16) к преобразованию Лапласа по x . Тогда для

$$\psi_{\lambda}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \psi_{\lambda}(x) dx \quad (18)$$

с учетом свойства 3 резольвенты (см. § 2.4) получаем следующее выражение:

$$\psi_{\lambda}(s) = \frac{C_{\lambda} - \frac{1}{s}}{k(s) - \lambda}, \quad \operatorname{Re} s \geq \max(0, s_0). \quad (19)$$

Функция $\psi_{\lambda}(s)$ при $\lambda > 0$ определена и аналитична по s в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Отсюда немедленно заключаем, что нуль знаменателя в (18) $s = s(\lambda)$ должен быть и нулем числителя. Таким образом, получаем

$$C_{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p\{\tau^0 \geq t\} dt = \frac{1}{s(\lambda)}. \quad (20)$$

В итоге из формул (12), (16) и (20) получаем утверждения (4) и (5) теоремы.

Обсуждение результатов. Сформулированный в теореме результат позволяет получить ряд интересных следствий.

1°. Математическое ожидание момента первого вхождения процесса на полуось $[0, +\infty)$ конечно при $M\lambda_1(1) > 0$ и равно

$$M\tau^0 = \frac{1}{s_0}, \quad (21)$$

и бесконечно при $M\lambda_1(1) \leq 0$.

2°. При $M\lambda_1(1) > 0$ для математического ожидания имеем формулу

$$M\tau^\lambda = M\tau^0 R(x) - \int_0^x R(y) dy. \quad (22)$$

3°. Формула (4) содержит также результат § 3.1, а именно при $M\lambda_1(1) < 0$:

$$P\{\bar{\lambda} < x\} = P\{\tau^\lambda = \infty\} = 1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} M e^{-\lambda \tau^\lambda} = -M\lambda_1(1) R(x). \quad (23)$$

В частности, дефект распределения первого лестничного момента τ^0 определяется равенством

$$P\{\tau^0 = \infty\} = -M\lambda_1(1). \quad (24)$$

4°. Сравнивая (22) и (23), получаем следующую вероятностную интерпретацию потенциала:

при $M\lambda_1(1) < 0$:

$$R(x) = \frac{P\{\tau^\lambda = \infty\}}{P\{\tau^0 = \infty\}}. \quad (25)$$

5°. Формулу (19) с учетом (12) и (20) можно переписать в виде

$$M \exp[-\lambda \tau^{\psi_s}] = 1 - \frac{\lambda}{k(s) - \lambda} \left[\frac{1}{s(\lambda)} - 1 \right], \quad (26)$$

где ψ_s — показательно распределенная случайная величина с параметром s : $P\{\psi_s \geq t\} = e^{-st}$.

Приведенные выше следствия получаются из формул (4) и (5) с использованием свойств корня $\lambda(s)$ уравнения (6), приведенных в конце § 2.4 (см. (30) и (33) § 2.4).

6°. Если воспользоваться свойством 6 резольвенты (§ 2.4) соотношением (3), тогда из формулы (16) можно получить распределение максимума процесса на конечном интервале через одномерные распределения процесса:

$$P\{\max_{0 \leq u \leq t} \lambda_1(u) \leq x\} = P\{\lambda_1(t) \leq x\} -$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^t P\{\lambda_1(t-u) \leq x\} P\{\max_{0 \leq v \leq u} \lambda_1(v) \leq 0\} du. \quad (27)$$

Формула (27) совпадает с аналогичным результатом И. Такача [20 , § 15], если в [20] дифференциал по y понимать только по "свободному" аргументу.

§ 3.3. Величина перескока положительного уровня¹⁸

Определим величину первого перескока положительного уровня $x > 0$ γ_x соотношением (см. рис. 2)

$$\gamma_x = \lambda_1(\tau^x) - x. \quad (1)$$

Напомним, что процесс $\lambda_1(t)$ непрерывен справа.

Основной результат настоящего параграфа приведен в теореме 1.

Теорема 1. Для производящей функции величины первого перескока γ_x положительного уровня $x > 0$ имеет место представление при $Re s > 0$:

$$Me^{-s\gamma_x} = R(x)[Me^{-s\tau_0} - 1] + k(s) \int_x^\infty e^{s(x-y)} R(y) dy, \quad (2)$$

при этом

¹⁸ Методом потенциала величина перескока исследована в работе [11] (см. также [22,23]).

$$Me^{-s\delta_0} = \begin{cases} 1 - (s - s_0)g(s) & \text{при } s_0 < 0; \\ 1 - sg(s) & \text{при } s_0 \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $g(s)$ — множитель в разложении символа $A(s)$ (см. § 2.1).

Замечательным свойством функционала γ_x является тот факт, что его производящая функция выражается через потенциал, а не через резольвенту, как это имеет место для других функционалов.

Для доказательства теоремы воспользуемся стохастическим соотношением для величины перескока:

$$\gamma_x = \gamma_{x+\xi-\xi}, \quad x \geq 0; \quad \gamma_x = -x, \quad x < 0. \quad (4)$$

Поясним смысл соотношений (4). Перескок уровня $x \geq 0$ процессом $\lambda_t(t)$ с $\lambda_t(0) = 0$ имеет то же распределение, что и перескок уровня x процессом $\lambda_t(\xi+t)$ с $\lambda_t(\xi) = \xi - \xi$ или, что то же самое, в силу строгой марковости, перескок уровня $x + \xi - \xi$ процессом $\lambda_t(t)$. Второе равенство в (4) следует из того, что при $x + \xi - \xi < 0$ перескок равен $\xi - \xi - x$.

Введем производящую функцию величины первого перескока

$$\varphi_s(x) = Me^{-s\gamma_x}. \quad (5)$$

Используя соотношение (4) и формулу условных математических ожиданий, получаем

$$\varphi_s(x) = Me^{-s\gamma_{x+\xi-\xi}} = a \int_x^\infty e^{-a(y-x)} dy \int_0^\infty \varphi_s(y-z) dF(z). \quad (6)$$

Откуда следует дифференцируемость $\varphi_s(x)$ по x и уравнение

$$K\varphi_s(x) = \frac{d\varphi_s(x)}{dx} + a \int_0^\infty [\varphi_s(x-y) - \varphi_s(x)] dF(y) = 0, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Из второго условия в (4) находим

$$\varphi_s(x) = e^{sx}, \quad x < 0. \quad (8)$$

Чтобы получить задачу в стандартной форме, введем функцию

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \varphi_s(x) - e^{sx}, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (9)$$

Для нее с учетом того, что

$$K[e^{sx}] = e^{sx} k(s), \quad (10)$$

получим из (7) задачу в стандартной форме:

$$K[\tilde{\varphi}_s(x)] = -e^{sx} k(s), \quad x \geq 0; \quad \tilde{\varphi}_s(x) = 0, \quad x < 0. \quad (11)$$

Решение задачи (11) получаем в виде

$$\tilde{\varphi}_s(x) = C_s R(x) - k(s) \int_0^x e^{s(x-y)} R(y) dy. \quad (12)$$

Для того, чтобы получить выражение для производящей функции величины первого перескока, нужно теперь воспользоваться свойством 4 потенциала (§ 2.3):

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} R(x) dx = \frac{1}{k(s)}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) с учетом (13) имеем

$$\varphi_s(x) = C_s R(x) + e^{sx} k(s) \int_x^{\infty} e^{-sy} R(y) dy. \quad (14)$$

Следует определить параметр C_s . Полагая в (14) $x=0$, найдем

$$C_s = M e^{-s s_0 - 1}. \quad (15)$$

С другой стороны, переходя в (14) к преобразованиям Лапласа по x , получим

$$\varphi_s(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \varphi_s(x) dx = \left[C_s + \frac{k(\lambda) - k(s)}{\lambda - s} \right] / k(\lambda). \quad (16)$$

Функция $k(\lambda)$ имеет два нуля на вещественной оси (§ 2.1): $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = s_0$. Если $s_0 > 0$, тогда в (16) слева стоит функция, аналитическая в правой полуплоскости $\text{Re } \lambda > 0$. Поэтому множитель C_s должен компенсировать полюс левой

части (16) в точке $\lambda = s_0$. Следовательно,

$$C_s = \frac{A(s)}{s_0 - s}. \quad (17)$$

Или с учетом факторизации символа (см. (7) § 2.1)

$$C_s = -sg(s). \quad (18)$$

Если же $s_0 < 0$, тогда случайная величина \tilde{r}_x — несобственная с дефектом распределения, равным $P\{\tilde{\lambda} < x\}$. Следовательно, при $s > 0$ с учетом (8) § 3.1 и (3) § 2.2 имеем

$$Me^{-s\tilde{r}_x} = M[e^{-s\tilde{r}_x} | (\tilde{\lambda} > x)] \leq P\{\tilde{\lambda} > x\} =$$

$$= 1 + M\lambda, (1) R(x) = Re^{s_0 x} + V(x).$$

Так что в (16) $\varphi_s(x)$ мажорируется экспонентой $e^{s_0 x}$ с $s_0 < 0$, поэтому $\varphi_s(\lambda)$ аналитична по λ в правой полуплоскости $Re \lambda \geq 0$, включая мнимую ось. Значит C_s должна компенсировать полюс в правой части (16) в точке $\lambda = 0$. Таким образом, получаем с учетом факторизации символа (7) § 2.1:

$$C_s = -\frac{A(s)}{s} = -(s - s_0)g(s). \quad (19)$$

Наконец, при $s_0 = 0$ знаменатель в (16) имеет в точке $\lambda = 0$ нуль кратности два, в то время как $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \varphi_s(\lambda) < \infty$. Поэтому C_s должен компенсировать нуль знаменателя в точке $\lambda = 0$:

$$C_s = -\frac{A(s)}{s} = -sg_0(s). \quad (20)$$

Объединяя (17)–(20) с (14) и (15), получаем утверждения (2) и (3) теоремы.

Представление (2) производящей функции величины перескока \tilde{r}_x позволяет получить предельные распределения при $x \rightarrow \infty$.

Теорема 2*. В условиях леммы о факторизации имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M e^{-s\tau x} = \begin{cases} \frac{s_0}{M\chi_1(1)} g(s) & \text{при } M\chi_1(1) > 0 \\ \frac{2}{\sigma^2} g_0(s) & \text{при } M\chi_1(1) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

||

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M [e^{-s\tau x} / \sigma_x < \infty] = \frac{s_0}{M\chi_1(1)} g(s) \text{ при } M\chi_1(1) < 0. \quad (22)$$

Доказательство. При $M\chi_1(1) > 0$ используем лемму о факторизации символа (7) § 2.1 и основное представление потенциала (3) § 2.2. Преобразуем (2), с учетом (3):

$$M e^{-s\tau x} = \frac{s}{M\chi_1(1)} g(s) [1 - Re^{s_0 x} - V(x)] -$$

$$- \frac{s(s-s_0)g(s)}{M\chi_1(1)} \int_x^\infty e^{s(x-y)} [1 - Re^{s_0 y} - V(y)] dy =$$

$$= \frac{s_0 g(s)}{M\chi_1(1)} - \frac{s g(s)}{M\chi_1(1)} V(x) + \frac{k(s)}{M\chi_1(1)} \int_0^\infty e^{-sy} V(x+y) dy. \quad (23)$$

Предельный переход по $x \rightarrow \infty$ в (23) с учетом свойств функции дает первое из соотношений в (21).

При $M\chi_1(1) = 0$ используем основное представление потенциала (4) § 2.2 и факторизацию символа (11) § 2.1 с учетом (3):

* См. также работы [10, 11, 22].

$$M e^{-s_0 x} = -s g_0(s) R(x) + k(s) \int_x^{\infty} e^{s(x-y)} R(y) dy =$$

$$= -\frac{2}{\sigma^2} \epsilon g_0(s) [x + R_0 - V_0(x)] + \frac{2}{\sigma^2} s^2 g_0(s) \left[\int_x^{\infty} e^{s(x-y)} (y + R_0) dy - \int_x^{\infty} e^{s(x-y)} V(y) dy \right]$$

$$= \frac{2}{\sigma^2} g_0(s) + \frac{2}{\sigma^2} s g_0(s) V_0(x) - \frac{2}{\sigma^2} s^2 g_0(s) \int_0^{\infty} e^{-sy} V(x+y) dy. \quad (24)$$

Результат предельного перехода при $x \rightarrow \infty$ в (24) очевиден с учетом свойств погранслоя $V_0(x)$.

При $M \chi_1(1) < 0$ учитывая, что ((23) § 3.2)

$$P\{\epsilon_x < \infty\} = 1 + M \chi_1(1) R(x), \quad (25)$$

преобразуем

$$M[e^{-s_0 x} / \epsilon_x < \infty] = -\frac{(s-s_0)g(s)}{1+M\chi_1(1)R(x)} R(x) + \frac{k(s)}{1+M\chi_1(1)R(x)} \int_x^{\infty} e^{s(x-y)} R(y) dy$$

с учетом основного представления потенциала (3) § 2.2 к виду

$$M[e^{-s_0 x} / \epsilon_x < \infty] = \frac{s_0 g(s)}{M\chi_1(1)} - \frac{sg(s)}{M\chi_1(1)} \frac{V(x)}{Re^{s_0 x} + V(x)} + \frac{k(s)}{Re^{s_0 x} + V(x)} \int_0^{\infty} e^{-sy} V(x+y) dx. \quad (26)$$

Предельный переход при $x \rightarrow \infty$ в (26) с учетом свойств погранслоя дает (22).

Обсуждение результатов. 1°. Формула (3) допускает обращение по s . При $s_0 < 0$ с учетом факторизации символа (§ 2.1) имеем

$$(s - s_0)g(s) = 1 - a \frac{1 - f(s)}{s}. \quad (27)$$

Следовательно, при $s_0 < 0$ (отрицательное течение)

$$M[e^{-s\tau_0}] (\bar{\lambda} > 0) = a \frac{1 - f(s)}{s}. \quad (28)$$

Отсюда получаем явный вид плотности распределения τ_0 :

$$\frac{d}{dx} P\{\tau_0 \leq x; \bar{\lambda} > 0\} = a(1 - F(x)). \quad (29)$$

В частности, учитывая, что $P\{\bar{\lambda} > 0\} = 1 - W(0) = am$, получаем формулу для условного распределения τ_0 :

$$P\{\tau_0 \leq x / \bar{\lambda} > 0\} = \frac{1}{m} \int_0^x (1 - F(y)) dy \quad \text{при } M\lambda_1(1) < 0. \quad (30)$$

При $M\lambda_1(1) > 0$ ($s_0 > 0$; положительное течение), учитывая (18) и факторизацию символа (§ 2.1), имеем

$$Me^{-s\tau_0} = 1 - sg(s) = a \frac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0}. \quad (31)$$

Отсюда находим явный вид плотности распределения τ_0 :

$$\frac{d}{dx} P\{\tau_0 \leq x\} = a \int_0^{\infty} e^{-s_0(x-y)} dF(y). \quad (32)$$

В частности, при $s_0 = 0$ с учетом § 2.1 имеем

$$Me^{-s\tau_0} = \frac{1 - f(s)}{ms}. \quad (33)$$

Или, обращая по s :

$$P\{\tau_0 \leq x\} = \frac{1}{m} \int_0^x (1 - F(y)) dy. \quad (34)$$

2.0. Двойное преобразование Лапласа распределения величины τ_x имеет вид

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} Me^{-s\tau_x} dx = \frac{Me^{-s\tau_0} - 1}{k(\lambda)} + \frac{k(\lambda) - k(s)}{(\lambda - s)k(\lambda)}. \quad (35)$$

Если воспользоваться формулой (2) при $M\lambda_1(1) \neq 0$ т.е. когда τ_0 и τ_x — собственные случайные величины, и учесть лемму о факторизации, то после несложных преобразований можно получить следующее выражение:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} M e^{-s\tau_x} dx = \frac{M e^{-s\tau_0} - M e^{-\lambda\tau_0}}{(\lambda-s)(1-M e^{-\lambda\tau_0})} \quad (3)$$

Обращение преобразования Лапласа по s равенства (36) приводит к формуле

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} P\{\tau_x \geq t\} dx = [1 - M e^{-\lambda\tau_0}]^{-1} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} P\{\tau_0 \geq x+y\} dx, \quad (3)$$

полученной в работе [19].

3°. Легко заметить, что предельные выражения в (21) (22) есть производящие функции некоторой случайной величины которую естественно назвать предельной величиной перескока через бесконечно удаляющийся барьер τ_{∞} :

$$M e^{-s\tau_{\infty}} = \begin{cases} \frac{s_0}{M\lambda_1(1)} g(s) & \text{при } M\lambda_1(1) \neq 0 \\ \frac{2}{\sigma^2} g_0(s) & \text{при } M\lambda_1(1) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Вспомогательные представления $g(s)$ и $g_0(s)$ в виде преобразования Лапласа функций $b(x)$ и $b_0(x)$ соответственно (см § 2.1) приводят к заключению, что величина τ_{∞} имеет плотность распределения:

$$\frac{d}{dx} P\{\tau_{\infty} \leq x\} = \frac{a}{M\lambda_1(1)} \int_x^{\infty} [1 - e^{-s_0(x-y)}] dF(y), \quad (3)$$

$M\lambda_1(1) \neq 0,$

$$\frac{d}{dx} P\{\tau_{\infty} \leq x\} = \frac{2a}{\sigma^2} \int_x^{\infty} (y-x) dF(y), \quad M\lambda_1(1) = 0. \quad (4)$$

§ 3.4. Совместное распределение момента и величины перескока положительного уровня

Изложенный в предыдущих параграфах настоящей главы анализ позволяет также получать и совместные производящие функции граничных функционалов. Для иллюстрации этого утверждения приведем результат для момента τ^x и величины δ_x перескока положительного уровня $x \geq 0$.

Теорема. При $\operatorname{Re} \lambda > 0$ и $\operatorname{Re} \alpha > 0$ имеет место представление:

$$M e^{+\alpha \tau^x - \lambda \delta_x} = [k(\alpha) - \lambda] \left[\frac{R_N(x)}{s(\lambda) - \alpha} + \int_x^\infty e^{-\alpha(x-y)} R_N(y) dy \right]. \quad (1)$$

Известно,

$$M e^{-\lambda \tau^0 - \alpha \delta_0} = 1 - \frac{k(\alpha) - \lambda}{\alpha - s(\lambda)}. \quad (2)$$

Для того, чтобы получить результат, сформулированный в теореме, воспользуемся стохастическими соотношениями для τ^x и δ_x , приведенными в § 3.2 и 3.3 соответственно (см. (3) § 3.2 и (4) § 3.3):

$$\tau^x = \tau + \tau^{x+\tau-\tau}, \quad x \geq 0; \quad \tau^x = 0, \quad x < 0, \quad (3)$$

$$\delta_x = \delta_{x+\tau-\tau}, \quad x \geq 0; \quad \delta_x = -x, \quad x < 0. \quad (4)$$

Введем совместную производящую функцию

$$\psi_{\lambda, \alpha}(x) = M e^{-\lambda \tau^x - \alpha \delta_x}. \quad (5)$$

На стохастических соотношениях (3) и (4), применяя формулу тоталитарных математических ожиданий, получаем

$$\psi_{\lambda, \alpha}(x) = \alpha \int_x^\infty e^{-(\alpha + \lambda)(y-x)} dy \int_0^\infty \psi_{\lambda, \alpha}(y-z) dF(z). \quad (6)$$

Следует дифференцируемость $\psi_{\lambda, \alpha}(x)$ по x и уравнение

$$\frac{d\psi_{\lambda, \mu}(x)}{dx} + \alpha \int_0^{\infty} [\psi_{\lambda, \mu}(x-y) - \psi_{\lambda, \mu}(x)] dF(y) - \lambda \psi_{\lambda, \mu}(x) = 0, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Используя дополнительные условия при $x < 0$ в (3) и (4), находим

$$\psi_{\lambda, \mu}(x) = e^{\mu x}, \quad x < 0. \quad (8)$$

Чтобы получить стандартную задачу, введем функцию

$$\tilde{\psi}_{\lambda, \mu}(x) = \psi_{\lambda, \mu}(x) - e^{\mu x}. \quad (9)$$

И заметим, что при $-\infty < x < \infty$

$$[K - \lambda I] e^{\mu x} = [k(\mu) - \lambda] e^{\mu x}. \quad (10)$$

Тогда для $\tilde{\psi}_{\lambda, \mu}(x)$ получаем стандартную задачу:

$$\begin{aligned} K \tilde{\psi}_{\lambda, \mu}(x) - \lambda \tilde{\psi}_{\lambda, \mu}(x) &= -[k(\mu) - \lambda] e^{\mu x}, \quad x \geq 0; \\ \tilde{\psi}_{\lambda, \mu}(x) &= 0, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь, применяя свойство 4 резольвенты, получаем решение задачи (11), а следовательно, и производящую функцию $\psi_{\lambda, \mu}(x)$ (см. (9)) в виде

$$\psi_{\lambda, \mu}(x) = C_{\lambda, \mu} R_{\lambda}(x) - [k(\mu) - \lambda] \int_0^x e^{\mu(x-y)} R_{\lambda}(y) dy + e^{\mu x}. \quad (12)$$

Если принять во внимание, что при $\operatorname{Re} \mu > s_0$ (см. (9) § 2.4

$$\int_0^{\infty} e^{-\mu y} R_{\lambda}(y) dy = [k(\mu) - \lambda]^{-1}; \quad (13)$$

тогда формула (12) перепишется в виде

$$\psi_{\lambda, \mu}(x) = C_{\lambda, \mu} R_{\lambda}(x) + [k(\mu) - \lambda] \int_x^{\infty} e^{\mu(x-y)} R_{\lambda}(y) dy. \quad (14)$$

Остается определить параметр $C_{\lambda, \mu}$. Полагая в (14) $x = 0$ с учетом (5) и (13), получаем

$$C_{\lambda, \mu} = M e^{-\lambda \tau^0 - \mu T_0 - 1}. \quad (15)$$

Перейдем теперь в (14) к преобразованию Лапласа по x :

$$\Phi_{\lambda, \mu}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \psi_{\lambda, \mu}(x) dx = \left[C_{\lambda, \mu} + \frac{k(s) - k(\mu)}{s - \mu} \right] [k(s) - \lambda]^{-1}. \quad (16)$$

Функция $k(s) - \lambda$ по s имеет в правой полуплоскости нуль $s(\lambda)$ при $\lambda > 0$. В то же время $\psi_{\lambda, \mu}(s)$ аналитична при $\operatorname{Re} s > 0$. Следовательно, первый множитель в (16) также имеет нуль $s(\lambda)$. Таким образом, получаем

$$C_{\lambda, \mu} = \frac{k(\mu) - \lambda}{s(\lambda) - \mu}. \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), получаем формулу (1). А из (15) и (17) следует формула (2).

Обсуждение результатов. Из приведенной теоремы, в частности, должны получаться результаты § 3.2 и 3.3 для произвольных функций τ^x и τ_x в отдельности. Действительно, полагая в (1) $\mu = 0$, получаем

$$M e^{-\lambda \tau^x} = \frac{\lambda R_{\lambda}(x)}{s(\lambda)} - \lambda \int_x^{\infty} R_{\lambda}(y) dy, \quad (18)$$

что приводит к формуле (1) § 3.2., если заметить

$$-\lambda \int_x^{\infty} R_{\lambda}(y) dy = 1 + \lambda \int_0^x R_{\lambda}(y) dy. \quad (19)$$

при $\lambda = 0$ результат (2) § 3.3 получаем из формулы (14) в расчете (15).

§ 3.5. Момент прохождения положительного уровня*

В § 3.2 был рассмотрен функционал τ^x — момент достижения положительного уровня $x > 0$ скачком процесса. Теперь мы рассмотрим момент достижения положительного уровня при спуске процесса на заданный уровень (рис. 3).

* См. также [18].

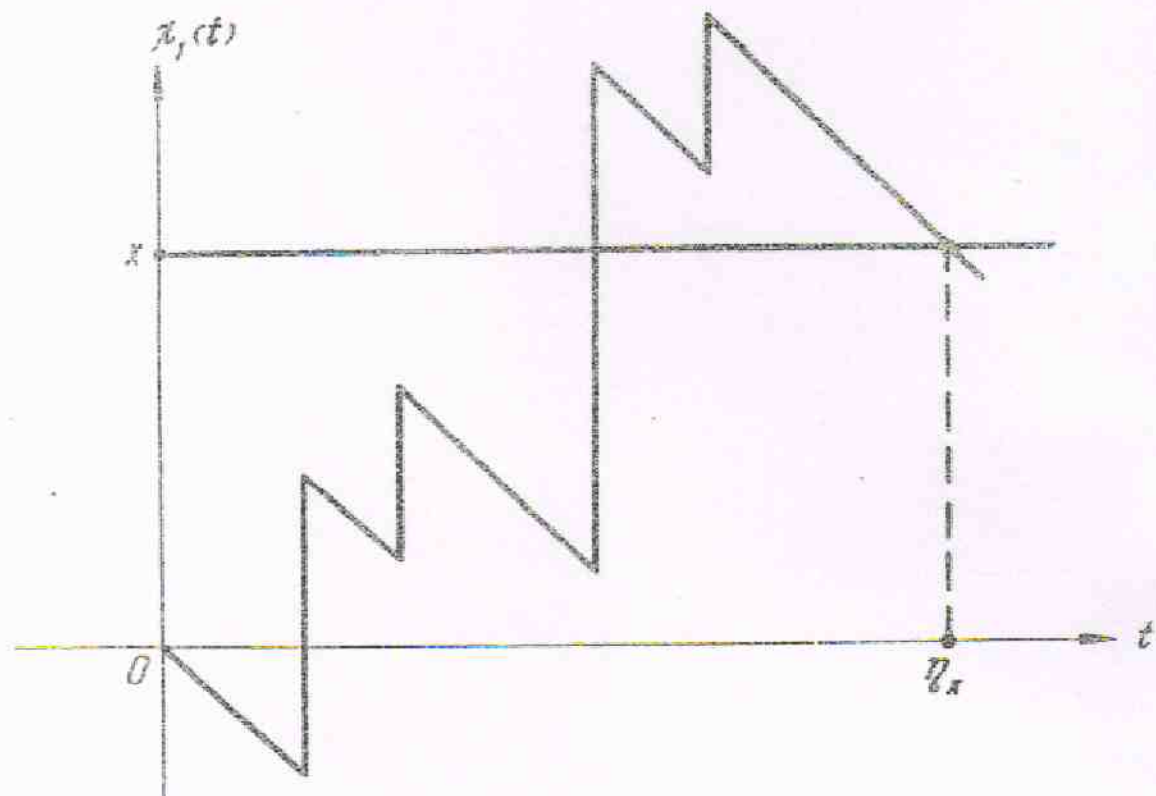


Рис. 3.

Если в первом случае в момент достижения заданного уровня происходит перескок уровня, то в данном случае в момент τ_x прохождения заданного уровня x значение процесса $x_1(\tau_x) = x$. Определим момент прохождения заданного уровня x :

$$\tau_x = \inf \{ t > 0 : x_1(t-0) = x_1(t) = x \}. \quad (1)$$

Момент прохождения заданного уровня τ_x определен как для положительных, так и для отрицательных значений x . При $x=0$ τ_0 означает первый момент прохождения нулевого уровня после того, как траектория процесса покинет начало координат.

Для отрицательных значений x функционал τ_x хорошо известен [3]:

$$Me^{-\lambda \varphi_x} = e^{s(\lambda)x}, \quad x < 0. \quad (2)$$

Формулу (2) можно получить также методом потенциала. При этом соответствующая задача значительно проще рассматриваемых в настоящей главе.

Стохастическое соотношение для φ_x при $x \geq 0$ имеет следующий вид:

$$\varphi_x = \varphi + \varphi_{x+\varphi} - \varphi, \quad x \geq 0 \quad (3)$$

и дополнительное условие (2).

Теорема. Для производящей функции момента первого прохода φ_x положительного уровня $x \geq 0$ имеет место представление при $Re \lambda > 0$:

$$Me^{-\lambda \varphi_x} = e^{s(\lambda)x} - R_\lambda(x) / s'(\lambda). \quad (4)$$

При этом φ_x — собственная случайная величина при $M_{\lambda_1}(1) = 0$ и несобственная при $M_{\lambda_1}(1) \neq 0$.

Дефект распределения φ_x определяется формулами:

$$P\{\varphi_x = \infty\} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{R} [1 - V(x)], & \text{если } M_{\lambda_1}(1) > 0; \\ P\{\max_{t \leq x} \lambda_1(t) \leq x\}, & \text{если } M_{\lambda_1}(1) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

В частности (см. (17) § 2.1):

$$P\{\varphi_0 = \infty\} = \begin{cases} s_0 < 0, & \text{если } M_{\lambda_1}(1) > 0; \\ \frac{1}{M_{\lambda_1}(1)}, & \text{если } M_{\lambda_1}(1) < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Для доказательства теоремы составим уравнение для производящей функции $G_\lambda(x) = Me^{-\lambda \varphi_x}$, используя стохастическое соотношение (3) и дополнительное условие (2):

$$G_\lambda(x) = Me^{-\lambda \varphi - \lambda \varphi_{x+\varphi} + \varphi} = \alpha \int_x^\infty e^{-(\alpha + \lambda)(y-x)} dy \int_0^\infty G_\lambda(y-x) dF(x). \quad (7)$$

Отсюда после дифференцирования по x получаем уравнение

$$\frac{dG_N(x)}{dx} + \alpha \int_0^{\infty} [G_N(x-y) - G_N(x)] dF(y) - \lambda G_N(x) = 0, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

с дополнительным условием (2). Для приведения задачи к стандартной форме введем, как всегда, вспомогательную функцию

$$\tilde{G}_N(x) = e^{s(\lambda)x} - G_N(x). \quad (9)$$

Из определения корня $s(\lambda)$ уравнения $K(s(\lambda)) = \lambda$ следует, что

$$K[e^{s(\lambda)x}] = \lambda e^{s(\lambda)x}. \quad (10)$$

Поэтому для $\tilde{G}_N(x)$ получаем стандартную задачу в виде

$$K\tilde{G}_N(x) - \lambda \tilde{G}_N(x) = 0, \quad x \geq 0; \quad \tilde{G}_N(x) = 0, \quad x < 0. \quad (11)$$

Из свойства 4 резольвенты (см. § 2.4) следует

$$\tilde{G}_N(x) = G_N R_N(x),$$

так что

$$G_N(x) = e^{s(\lambda)x} - C_N R_N(x). \quad (12)$$

Для определения параметра C_N перейдем в (12) к преобразованию Лапласа по x ($\operatorname{Re} s > 0$):

$$g_N(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} G_N(x) dx = \frac{1}{s - s(\lambda)} - \frac{C_N}{k(s) - \lambda}. \quad (13)$$

Выделяя во втором слагаемом главную часть его единственной особенности в правой полуплоскости (см. свойство 6 § 2.4), получаем

$$g_N(s) = \frac{1 - C_N s'(\lambda)}{s - s(\lambda)} + C_N r_N^0(s). \quad (14)$$

Так как функции $g_N(s)$ и $r_N^0(s)$ аналитические при $\operatorname{Re} s > 0$, то параметр C_N должен аннулировать первое слагаемое в правой части (14), т.е.

$$C_N = 1/s'(\lambda). \quad (15)$$

Из формул (12) и (15) следует (4).

Для вычисления дефекта распределения ν_x нужно воспользо-
ваться следующими свойствами корня $s(\lambda)$ (см. (33), § 2.4):

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} s(\lambda) &= s_0 && \text{при } M\lambda_1(l) > 0; \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} s(\lambda) &= 0 && \text{при } M\lambda_1(l) \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

и при производной:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s'(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{s_0 \mu_0}, & M\lambda_1(l) > 0; \\ \infty, & M\lambda_1(l) = 0; \\ -\frac{1}{M\lambda_1(l)}, & M\lambda_1(l) < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из формулы (4), полагая $\lambda = 0$, получаем при $M\lambda_1(l) > 0$

$$P\{\nu_x < \infty\} = e^{s_0 x} - s_0 \mu_0 R(x), \quad (18)$$

а при $M\lambda_1(l) < 0$

$$P\{\nu_x < \infty\} = 1 + M\lambda_1(l) R(x). \quad (19)$$

Из этих формул и следует (5), если учесть следствия 1 и 2, приве-
денные в конце § 2.4. Формула (6) является очевидным следствием
(5).

Обсуждение результатов. При $M\lambda_1(l) \neq 0$ несобствен-
ности случайной величины ν_x понятна из интуитивных вероят-
ностных соображений. Действительно, при $M\lambda_1(l) > 0$ траектория
процесса $\lambda_t(t)$ уходит на $+\infty$ с вероятностью единица.
А значит, следует ожидать, что после перескока уровня $x \geq 0$
траектория с положительной вероятностью не вернется на уровень
 x . В случае $M\lambda_1(l) < 0$ траектория с веро-

ятностью единица уходит на $-\infty$, и, следовательно, с положительной вероятностью не перескочит уровня $x > 0$ и тем более не пройдет через этот уровень.

Сравнивая формулу (4) с представлением резольвенты (18) § 2.4, получаем выражение производящей функции момента прохождения положительного уровня через одномерные распределения процесса

$$Me^{-\lambda q_x} = \frac{1}{s'(\lambda)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p\{\lambda_1(t) \leq x\} dt. \quad (20)$$

И наоборот, представление резольвенты через производящую функцию момента прохождения положительного уровня

$$R_{\lambda}(x) = s'(\lambda) [e^{s(\lambda)x} - Me^{-\lambda q_x}]. \quad (21)$$

Из формулы (4) при $x = 0$ получаем

$$Me^{-\lambda q_0} = 1 - \frac{1}{s'(\lambda)},$$

что дает вероятностную интерпретацию $s'(\lambda)$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dP\{q_0 > t\} = \frac{1}{s'(\lambda)}. \quad (22)$$

Формулы (20) и (22) позволяют получить распределение в виде

$$P\{q_x \leq t\} = \frac{d}{dx} \int_0^t p\{\lambda_1(t-u) \leq x\} dP\{q_0 > u\}. \quad (23)$$

Из (2), (21) и (22) следует еще одно любопытное представление для резольвенты:

$$R_{\lambda}(x) = [(Me^{-\lambda q_x})^{-1} - Me^{-\lambda q_x}] / [1 - Me^{-\lambda q_0}]. \quad (24)$$

§ 3.6. Задачи о разорении

Большое число различных практических ситуаций приводит к задачам о разорении для сложного пуассоновского процесса [18, 21].

С теоретической точки зрения эти задачи представляют интерес в связи с тем, что граничные функционалы, рассматриваемые в них, определяются двумя поглощающими границами (рис. 4).

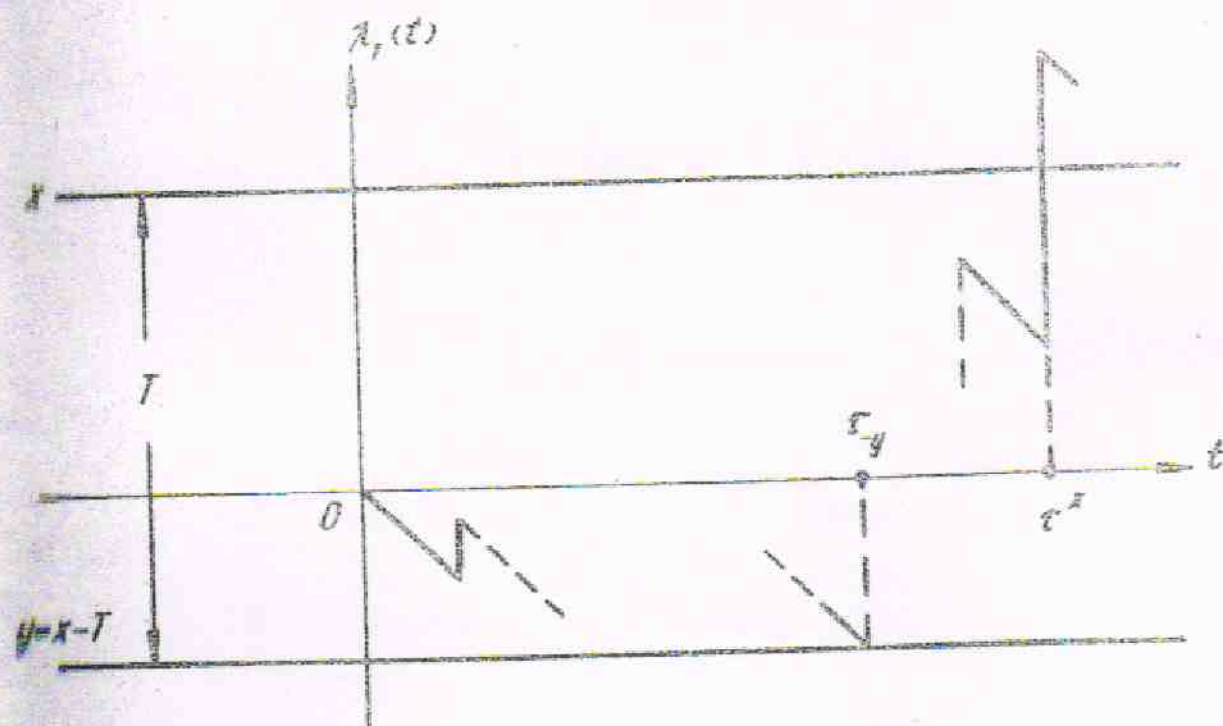


Рис. 4.

Определим два уровня поглощения: верхний $x > 0$ и нижний $y < 0$ и фиксируем расстояние между уровнями $T = x - y$. Известно [21], что с вероятностью единица процесс $\lambda_1(t) = \lambda(t) - t$ выйдет за пределы отрезка $[y, x]$.

Введем случайные величины: τ^x и τ_y — моменты выхода процесса $\lambda_1(t)$ через уровень x и через нижний уровень y соответственно:

$$\tau^x = \inf\{t: \lambda_1(t) \geq x\}; \quad \tau_y = \inf\{t: \lambda_1(t) \leq y\}. \quad (1)$$

Заметим, что при определении величин τ^x и τ_y вторая граница не учитывается.

Введем теперь индикаторы случайных событий, связанных с выходом сложного пуассоновского процесса $\lambda_1(t)$ за преде-

лы отрезка $[y, x]$ через верхний или нижний уровни:

$$I^T(x) = I\{\lambda_1(t) > x - T, \forall t \leq \tau^x\}; \quad (2)$$

$$I_T(x) = I\{\lambda_1(t) < x, \forall t \leq \tau_{T-x}\}.$$

Индикатор $I^T(x)$ принимает значение 1, когда процесс $\lambda_1(t)$ покидает отрезок $[y, x]$ через верхний уровень x в момент τ^x , не пересекая нижнего уровня $y = x - T$. Индикатор $I_T(x)$ принимает значение 1, когда процесс $\lambda_1(t)$ выходит из отрезка $[y, x]$ через нижний уровень $y = x - T$ в момент τ_{T-x} , не пересекая верхний уровень x .

Как будет видно из дальнейшего, принятые нами обозначения, например, вместо уровня y его выражение через x и T , наиболее целесообразны в рассматриваемых задачах. Оказывается, что в качестве исходных параметров в задачах о разорении следует принять длину интервала $T = x - y$, из которого происходит выход процесса, и расстояние начального положения процесса до верхнего уровня x .

Введем теперь основные функции, которыми определяются граничные функционалы в задачах о разорении.

Вероятности разорения

$$Q^T(x) = M I^T(x) = P\{\lambda_1(t) > x - T, \forall t \leq \tau^x\}; \quad (3)$$

$$Q_T(x) = M I_T(x) = P\{\lambda_1(t) < x, \forall t \leq \tau_{T-x}\}, \quad (4)$$

и производящие функции моментов разорения

$$B^T(x, \lambda) = M[e^{-\lambda \tau^x} I^T(x)]; \quad B_T(x, \lambda) = M[e^{-\lambda \tau_{T-x}} I_T(x)]. \quad (5)$$

Теорема.* Имеют место следующие соотношения для вероятностей разорения:

$$Q_T(x) = 1 - Q^T(x) = R(x)/R(T); \quad (6)$$

для производящих функций моментов разорения при $\operatorname{Re} \lambda > 0$:

* См. также [18, 20].

$$B_T(x, \lambda) = R_N(x) / R_N(T); \quad (7)$$

$$B_T^I(x, \lambda) = 1 - B_T(x, \lambda) \left[1 + \lambda \int_0^T R_N(u) du \right] + \lambda \int_0^x R_N(u) du. \quad (8)$$

Для доказательства утверждений (6)–(8) составим стохастические соотношения для индикаторов разорения (2) по стандартной схеме с учетом первого скачка:

$$I^I(x) = I(\xi < T - x) I^I(x + \xi - \xi); \quad I^I(x) = 1, x < 0; \quad I^I(T) = 0. \quad (9)$$

Поясним (9). Выход процесса через верхнюю границу x , не пересекая нижней границы $y = x - T$, произойдет, если момент первого скачка $\xi < T - x$, в противном случае в результате сноса процесс достигнет уровня $y = x - T$, и далее, после первого скачка на величину ξ должен произойти выход процесса на отрезка длиной T через верхний уровень, отстоящий от начального положения процесса после скачка на расстоянии $x + \xi - \xi$. Дополнительные условия в (9) очевидны: при $x < 0$ процесс уже находится над верхним уровнем; при $x = T$ процесс находится на нижнем уровне.

Аналогично строится соотношение

$$I_T(x) = I(\xi \geq T - x) + I(\xi < T - x) I_T(x + \xi - \xi); \quad (10)$$

$$I_T(x) = 0, x < 0, \quad I_T(T) = 1.$$

Пояснение: нижний уровень $y = x - T$ достигается либо когда момент первого скачка $\xi \geq T - x$, либо когда после первого скачка произойдет выход процесса через нижний уровень с начальным положением, находящимся на расстоянии $x + \xi - \xi$ от верхнего уровня. Дополнительные условия в (10) очевидны: при $x < 0$ процесс находится над верхним уровнем, при $x = T$ процесс уже находится на нижнем уровне.

Далее, нам понадобятся стохастические соотношения для моментов выхода из отрезка $[y, x]$. В § 3.2 мы имеем

$$\tau^x = \xi + \tau^{x + \xi - \xi}, x \geq 0; \quad \tau^x = 0, x < 0. \quad (11)$$

Для момента выхода через нижний уровень ε_{T-x} имеем соотношения, пояснить которые предлагаем читателю:

$$\varepsilon_{T-x} = I(\xi \geq T-x)(T-x) + I(\xi < T-x)[\xi + \varepsilon_{T-x-\xi}], \quad x > 0; \quad (12)$$

$$\varepsilon_x = 0, \quad x \leq 0.$$

Теперь переходим от стохастических соотношений к стандартным интегродифференциальным уравнениям. Учитывая очевидное соотношение $Q^T(x) = 1 - Q_T(x)$, можно ограничиться составлением уравнения для $Q_T(x)$. Из соотношений (10), переходя к математическим ожиданиям, получаем промежуточное уравнение

$$Q_T(x) = e^{-a(T-x)} + a \int_0^{T-x} e^{-au} du \int_0^\infty Q_T(x+u-z) dF(z).$$

Или иначе, после замены переменных $x+u = u'$:

$$Q_T(x) = e^{-a(T-x)} + a \int_x^T e^{-a(u-x)} du \int_0^\infty Q_T(u-z) dF(z). \quad (13)$$

Отсюда следует дифференцируемость функции $Q_T(x)$ по x и уравнение в стандартной форме:

$$\frac{dQ_T(x)}{dx} + a \int_0^\infty [Q_T(x-z) - Q_T(x)] dF(z) = 0, \quad 0 \leq x < T, \quad (14)$$

с дополнительными условиями

$$Q_T(x) = 0, \quad x < 0; \quad Q_T(T) = 1. \quad (15)$$

Несмотря на то, что функция $Q_T(x)$ удовлетворяет стандартному уравнению лишь на конечном интервале $[0, T]$, мы все-таки для нее можем написать представление в стандартной форме:

$$Q_T(x) = C_T R(x), \quad (16)$$

так как уравнение (14), по существу, является уравнением вольтерровского типа. С учетом первого из условий (15) уравнение (14) можно переписать в виде

$$\frac{dQ_T(x)}{dx} + a \left[\int_0^x Q_T(x-z) dF(z) - Q_T(x) \right] = 0. \quad (17)$$

Используя второе из условий (15), получаем утверждение теоремы (6).

Для производящей функции момента выхода процесса через нижний уровень $B_T(x, \lambda)$ воспользуемся стохастическими соотношениями (10) и (12):

$$\begin{aligned} B_T(x, \lambda) &= M[e^{-\lambda \tau_{T-x}} I_T(x)] = M\{\exp[-\lambda [I(\xi \geq T-x)(T-x) + \\ &+ I(\xi < T-x)[\xi + \tau_{T-x-\xi, \xi}]]][I(\xi \geq T-x) + \\ &+ I(\xi < T-x)I_T(x + \xi - \xi)]\} = \\ &= M\{[I(\xi \geq T-x)e^{-\lambda(T-x)} + I(\xi < T-x)e^{-\lambda(\xi + \tau_{T-x-\xi, \xi})}]x \\ &+ [I(\xi \geq T-x) + I(\xi < T-x)I_T(x + \xi - \xi)]\} = \\ &= M[I(\xi \geq T-x)e^{-\lambda(T-x)}] + M[I(\xi < T-x)e^{-\lambda(\xi + \tau_{T-x-\xi, \xi})}I_T(x + \xi - \xi)]. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} M[I(\xi \geq T-x)e^{-\lambda(T-x)}] &= e^{-(\alpha + \lambda)(T-x)}; \\ M[I(\xi < T-x)e^{-\lambda(\xi + \tau_{T-x-\xi, \xi})}I_T(x + \xi - \xi)] &= \\ &= \alpha \int_x^T e^{-(\alpha + \lambda)(u-x)} du \int_0^u B_T(u-z, \lambda) dF(z). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем промежуточное уравнение

$$B_T(x, \lambda) = e^{-(\alpha + \lambda)(T-x)} + \alpha \int_x^T e^{-(\alpha + \lambda)(u-x)} du \int_0^u B_T(u-z, \lambda) dF(z), \quad (18)$$

из которого стандартным приемом получаем следующее уравнение:

$$\frac{dB_T(x, \lambda)}{dx} + a \int_0^{\infty} [B_T(x-z, \lambda) - B_T(x, \lambda)] dF(z) - \lambda B_T(x, \lambda) = 0, \quad x < T, \quad (19)$$

и дополнительные условия

$$B_T(x, \lambda) = 0; \quad x < 0; \quad B_T(T, \lambda) = 1. \quad (20)$$

Те же соображения, что и для вероятности разорения, позволяют записать решение задачи (19)-(20) в виде (7).

Построим теперь уравнение для $B^T(x, \lambda)$, используя стохастические соотношения (9) и (11):

$$\begin{aligned} B^T(x, \lambda) &= M[e^{-\lambda \sigma^x} I^T(x)] = \\ &= M[e^{-\lambda(\varphi + \sigma^x + \varphi - \xi)} I(\varphi < T-x) I^T(x + \varphi - \xi)] = \\ &= a \int_x^T e^{-(a+\lambda)(u-x)} du \int_0^{\infty} B^T(u-z, \lambda) dF(z). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\frac{dB^T(x, \lambda)}{dx} + a \int_0^{\infty} [B^T(x-z, \lambda) - B^T(x, \lambda)] dF(z) - \lambda B^T(x, \lambda) = 0, \quad (21)$$

$$0 \leq x < T,$$

с дополнительными условиями

$$B^T(x, \lambda) = 1, \quad x < 0; \quad B^T(T, \lambda) = 0. \quad (22)$$

Чтобы получить уравнение в стандартных условиях, введем промежуточную функцию

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = 1 - B^T(x, \lambda). \quad (23)$$

Для нее получаем следующую задачу:

$$\frac{d\tilde{B}^T(x, \lambda)}{dx} + \lambda \int_0^\infty [\tilde{B}^T(x-z, \lambda) - \tilde{B}^T(x, \lambda)] df(z) - \lambda \tilde{B}^T(x, \lambda) = -\lambda, \quad (24)$$

$$0 \leq x < T,$$

в дополнительных условиях

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = 0, \quad x < 0; \quad \tilde{B}^T(T, \lambda) = 1. \quad (25)$$

То же соображения, что и для вероятности разорения, позволяют записать решение задачи (24)–(25) в стандартной форме:

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = \frac{R_\lambda(x)}{R_\lambda(T)} \left[1 + \lambda \int_0^T R_\lambda(u) du \right] - \lambda \int_0^x R_\lambda(u) du. \quad (26)$$

Из (23) и (26) с учетом (7) окончательно получаем последнее утверждение (8) теоремы.

Обсуждение результатов. Формулы (6) и (7) можно рассматривать как вероятностную интерпретацию потенциала и резольвенты сложного пуассоновского процесса на полуоси $[0, +\infty)$.

Вероятности разорения можно придать следующую интерпретацию:

$$Q_{T,x}(x) = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} [\lambda(t) - t] < x \right\} = R(x)/R(T+x); \quad (27)$$

$$Q^{T,x}(x) = P \left\{ \inf_{0 \leq t \leq T^x} [\lambda(t) - t] > -T \right\}. \quad (28)$$

Формулы (7), (8) легко преобразовать к виду, полученному в работе [18], используя представление резольвенты (21) § 3.5.

Из формулы (6) и свойств потенциала следуют известные [20] асимптотические свойства вероятности разорения $Q_T(x)$:
при $M\lambda_1(1) < 0$ (отрицательное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(x) = -M\lambda_1(1)R(x) = P \left\{ \max_{t \geq 0} \lambda_1(t) < x \right\}, \quad (29)$$

при $M\lambda_1(1) > 0$ (положительное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(x) e^{-s_0 T} = \frac{M\lambda_1(1)}{R} R(x) = s_0 u_0 R(x), \quad (30)$$

или иначе, при T и $x \rightarrow \infty$

$$Q_T(x) \approx e^{-s_0 T} \left[e^{s_0 x} - \frac{1}{R} \right]; \quad (31)$$

при $M\lambda_T(1) = 0$ (нулевое течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(x)/T = \frac{s_0^2}{2} R(x). \quad (32)$$

В частности,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q(uT)/T = u \quad (0 \leq u \leq 1), \quad (33)$$

что соответствует вероятности разорения в точке $u=1$ для винеровского процесса.

Приближенную формулу (31) можно рекомендовать для практических расчетов, применяя при больших s_0 и $\alpha > 1$:

$$s_0 \approx \frac{2M\lambda_T(1)}{aD\lambda_T(1)}; \quad \frac{1}{R} \approx \frac{1}{\alpha}. \quad (34)$$

§ 3.7. Пуассоновский процесс с отражением

В предыдущем параграфе мы убедились в том, что метод потенциала применим в граничных задачах с двумя поглощающими экранами. Здесь мы покажем, что методом потенциала можно также рассматривать задачи с одной поглощающей и другой задерживающей (отражающей) границей.

Введем процесс с отражением $\lambda_T(t)$, который в области $x > 0$ ведет себя как $\lambda(t) - t + T$, а при $\lambda_T(t) = 0$ происходит задержка процесса $\lambda_T(t)$ на экране $x=0$ в течение времени ξ , а затем происходит скачок на величину ξ ; далее процесс $\lambda_T(t)$ снова становится пуассоновским типа $\lambda(t) - t + T$ (рис. 5).

Иначе процесс с отражением $\lambda_T(t)$ можно определить следующим образом:

$$\lambda_T(t) = \lambda(t) - t + T - \inf_{0 \leq u \leq t} (0, \lambda(u) - u + T). \quad (1)$$

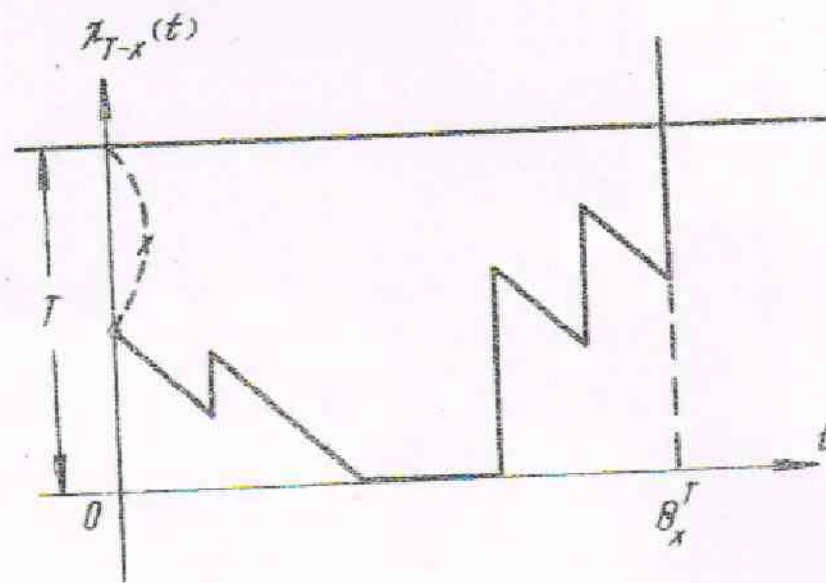


Рис. 5 .

В теории массового обслуживания процесс $\lambda_T(t)$ описывает виртуальное время ожидания и изучен подробно [3].

Мы рассмотрим здесь задачу достижения процессом $\lambda_T(t)$ положительного уровня. Иными словами, будет изучено распределение максимума процесса с отражением $\lambda_T(t)$ на конечном временном интервале. Эта задача имеет многочисленные практические интерпретации (см. гл. 6).

Определим случайную величину θ_x^T - время достижения процессом $\lambda_{T-x}(t) - T + x$ положительного уровня ($0 \leq x \leq T$) (рис. 5):

$$\theta_x^T = \inf \{ t > 0 : \lambda_{T-x}(t) - T + x \geq x \}. \quad (2)$$

Как видно на рис. 5 и легко понять из определения $\lambda_T(t)$, процесс $\lambda_{T-x}(t) - T + x = \lambda(t) - t - \inf_{0 \leq u \leq t} \{ \lambda(u) - u - T + x \}$ имеет нулевое начальное значение и отражающий экран на прямой $T + x \leq 0$.

Кажется более естественным рассматривать время достижения процессом $\lambda_T(t)$ уровня $x \geq T$, что в наших обоз-

начениях есть величина θ_x^{T+x} . Как будет видно из дальнейшего, выбранная нами система отсчета приводит к наиболее простым выражениям. Пересчет на другие системы отсчета не представляет труда. Сформулируем основной результат.

Теорема. Для производящей функции момента θ_x^T достижения процессом с отражением $\mu_{T-x}(t) - T+x$ уровня x ($0 \leq x \leq T$) имеет место представление ($\text{Re } \lambda > 0$):

$$M e^{-\lambda \theta_x^T} = 1 - \lambda \left[\frac{R_\lambda(T)}{R'_\lambda(T)} R_\lambda(x) - \int_0^x R_\lambda(y) dy \right]. \quad (3)$$

В частности, для математического ожидания θ_x^T справедлива формула

$$M \theta_x^T = \frac{R(T)}{R'(T)} R(x) - \int_0^x R(y) dy. \quad (4)$$

Здесь штрих у резольвенты и потенциала в формулах (3) и (4) означает производную по T .

Для доказательства теоремы воспользуемся стохастическими соотношениями для θ_x^T :

$$\theta_x^T \doteq \xi + \theta_{x+\xi-\eta}^T, \quad x \geq 0; \quad \theta_T^T \doteq \xi + \theta_{T-\eta}^T, \quad x \geq 0; \quad (5)$$

$$\theta_x^T = 0, \quad x < 0.$$

Приведенные соотношения (5) следуют из описания процесса $\mu_T(t)$ и определения θ_x^T . Отметим, что наличие отражающего экрана учтено лишь во втором соотношении в (5). Нетрудно удостовериться в том, что учет отражения в первом из соотношений в (5) не изменит вида полученных далее уравнений, так как в области $0 \leq x < T$ процесс с отражением $\mu_T(t)$ и процесс $\mu(t) - t$ имеют одинаковые производящие операторы. Наличие отражения меняет лишь граничные условия. Переходя к математическим ожиданиям в (5), получаем для $m_T(x) = M \theta_x^T$ уравнение

$$\frac{dm_T(x)}{dx} + a \int_0^\infty [m_T(x-y) - m_T(x)] df(y) = -1, \quad (6)$$

$$0 \leq x \leq T$$

и дополнительные условия

$$m_T(x) = 0, \quad x < 0; \quad \left. \frac{dm_T(x)}{dx} \right|_{x=T} = 0. \quad (7)$$

Объяснения требует лишь второе граничное условие. Из второго соотношения в (5) вытекает

$$m_T(T) = \frac{1}{a} \cdot \int_0^{\infty} m_T(T-y) dF(y)$$

или иначе

$$a \int_0^{\infty} [m_T(T-y) - m_T(T)] dF(y) = -1. \quad (8)$$

Сравнивая (6) и (8) при $x = T$, получаем условие отражения в (7).

Как и в § 3.6, $m_T(x)$ удовлетворяет уравнению (6) только на отрезке $0 \leq x \leq T$, однако мы можем воспользоваться стандартной формой решения уравнения (6), на полуоси $[0, +\infty)$ (см. § 2.3), так как уравнение (6), по существу, вольтерровского типа. Итак,

$$m_T(x) = C_T R(x) - \int_0^x R(y) dy. \quad (9)$$

Параметр C_T определяется из условия отражения (7):

$$C_T = \frac{R(T)}{R'(T)}. \quad (10)$$

Формулы (9) и (10) дают (4).

Введем производящую функцию величины θ_x^T :

$$Q_T(x, \lambda) = M e^{-\lambda \theta_x^T}. \quad (11)$$

Из стохастических соотношений (5) после соответствующих преобразований, с которыми мы уже встречались в предыдущих параграфах настоящей главы, получим уравнение

$$\frac{dQ_T(x, \lambda)}{dx} + a \int_0^{\infty} [Q_T(x-y, \lambda) - Q_T(x, \lambda)] dF(y) - \lambda Q_T(x, \lambda) = 0, \quad 0 \leq x \leq T \quad (12)$$

и дополнительные условия

$$Q_T(x, \lambda) = 1, x < 0; \quad \frac{dQ_T(x, \lambda)}{dx} \Big|_{x=T} = 0. \quad (13)$$

Аналогично тому, как это происходило в предыдущих параграфах после приведения задачи (12)–(13) к стандартной форме с учетом условия отражения для $Q_T(x, \lambda)$, получаем представление (3).

Обсуждение результатов. Формулы (3) и (4) служат исходными для асимптотического анализа, рассматриваемого в следующем параграфе. Очевидно, что из формулы (3) можно получить непосредственно формулу (4), не прибегая к составлению уравнения для математического ожидания. Приведенное здесь доказательство формулы (4) не использует определения резольвенты. Выделение формулы (4) для математического ожидания необходимо в связи с тем, что асимптотическое поведение величины θ_x^T существенно зависит от асимптотического поведения математического ожидания θ_x^T , что будет показано в § 3.8.

§ 3.8. Предельное поведение максимума пуассоновского процесса с отражением

Мы начнем с изучения поведения $M\theta_x^T = m_T(x)$, определяемого формулой (4) § 3.7 при $T \rightarrow \infty$, которое существенно зависит от знака $M\lambda_1(l)$.

Теорема 1. В условиях леммы о факторизации (§ 2.1) имеют место следующие предельные соотношения:

1°. При $M\lambda_1(l) > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\theta_x^T = R(x)/s_0 - \int_0^x R(y) dy; \quad (1)$$

2°. При $M\lambda_1(l) = 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} M\theta_x^T = R(x); \quad (2)$$

3°. При $M\lambda_1(l) < 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{s_0 T} M\theta_x^T = -\frac{\mathcal{E}_0}{M\lambda_1(1)} R(x). \quad (3)$$

Для доказательства соотношений (1)-(3) используем формулу (4) для $M\theta_x^T$, приведенную в § 3.7:

$$M\theta_x^T = \frac{R(T)}{R'(T)} R(x) - \int_0^x R(y) dy. \quad (4)'$$

Предельное поведение $M\theta_x^T$ определяется асимптотическим поведением параметра

$$C_T = \frac{R(T)}{R'(T)}. \quad (5)$$

Для асимптотического анализа C_T используем представление потенциала (3) § 2.2 при $M\lambda_1(1) \neq 0$:

$$R(T) = -\frac{1}{M\lambda_1(1)} [1 - Re^{s_0 T} - V(T)]. \quad (6)$$

Так как погранслоем $V(T)$ дифференцируем по T (см. § 2.2, следствие), то

$$R'(T) = \frac{s_0 R}{M\lambda_1(1)} e^{s_0 T} + \frac{V'(T)}{M\lambda_1(1)}. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7) для параметра C_T получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_T = 1/s_0, \quad M\lambda_1(1) > 0, \quad (8)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{s_0 T} C_T = -1/s_0 R, \quad M\lambda_1(1) < 0.$$

Заметим, что из формул (5) § 2.2 и (17) § 2.1 для константы Крамера имеем выражение

$$R = \frac{M\lambda_1(1)}{s_0 \mathcal{E}_0}. \quad (9)'$$

При $M\lambda_1(1) = 0$ используем представление потенциала (4) § 2.2:

$$R(T) = \frac{2}{\sigma^2} [T - R_0 - V_0(T)], \quad (10)$$

из которого находим (см. (27) § 2.2):

$$R'(T) = \frac{2}{\sigma^2} (1 - V_0'(T)). \quad (11)$$

И теперь из (10) и (11) следует

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} C_T = 1. \quad (12)$$

Формулы (8) и (12) вместе с (4) и (5) дают (1)–(3).

Замечание. Сравнивая (1) и (22) § 3.2, заключаем, что при $M\lambda_1(l) > 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\theta_x^T = M\epsilon^x, \quad (13)$$

что понятно из вероятностных соображений. При положительном течении ($M\lambda_1(l) > 0$), когда отражающий экран на уровне $x - T$ уходит на $-\infty$ (при $T \rightarrow \infty$), влияние отражающего экрана в пределе исчезает.

В случае же отрицательного течения ($M\lambda_1(l) < 0$) или нулевого течения ($M\lambda_1(l) = 0$) траектория процесса $\lambda_1(t)$ многократно отражается от экрана на уровне $x - T$ и до момента выхода θ_x^T на уровень x накопится время, существенно отличное от ϵ^x .

В теореме 1 расстояние от начальной точки до верхнего уровня было фиксировано. Представляет интерес изучение предельного поведения $M\theta_x^T$ при $T \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$.

Нетрудно заметить, что асимптотический анализ $M\theta_x^T$ при одновременном стремлении T и x к ∞ можно осуществить исходя из формул (1)–(3), устремляя x к ∞ .

В случае положительного течения ($M\lambda_1(l) > 0$) достаточно сослаться на формулу (18) и результат (22), сформулированный в § 3.2.

В случае $M\lambda_1(l) < 0$ при $x \rightarrow \infty$ следует воспользоваться представлением потенциала (6).

Перейдем теперь к изучению предельного поведения распределения величины θ_x^T .

Теорема 2^{*}. В условиях леммы о факторизации (§ 2.1) имеют место следующие предельные соотношения:

1^o. При $M_{\lambda_1}(t) > 0$ (положительное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M e^{-\lambda \theta_{\lambda}^T} = M e^{-\lambda \sigma^{\lambda}}. \quad (14)$$

2^o. При $M_{\lambda_1}(t) < 0$ (отрицательное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \exp[-\lambda e^{s_0^T \theta_{\lambda}^T}] = 1 - W(x) + W(x) \frac{1}{s + C}, \quad (15)$$

где

$$W(x) = P\{\max_{t \geq 0} \lambda_1(t) \leq x\}; \quad C = \frac{[M_{\lambda_1}(t)]^2}{\mu_0}. \quad (16)$$

3^o. При $M_{\lambda_1}(t) = 0$ (нулевое течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \exp[-\lambda T^{-2} \theta_{\lambda}^T] = \frac{\operatorname{ch}(1-u)\sqrt{\lambda d}}{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda d}}, \quad (17)$$

где

$$d = \frac{2}{\sigma^2}, \quad 0 < u \leq 1. \quad (18)$$

Доказательство. Первое утверждение (14) очевидно из вероятностных соображений, приведенных при объяснении соотношения (13). Вместе с тем этот результат следует также из аналитического соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{R_{\lambda}(T)}{R'_{\lambda}(T)} = s^{-1}(\lambda) \quad (19)$$

и представления (4) § 3.2 производящей функции величины ε^{λ} . Соотношение (19) проще всего получить, используя тауберову теорему [21, т.2, стр.508]:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s(\lambda)T} R_{\lambda}(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(s+s(\lambda))T} R_{\lambda}(T) dT = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{k(s+s(\lambda))-\lambda} = \frac{1}{k'(s(\lambda))}; \quad (20)$$

* Результат п.3^o получен совместно с Н.С.Братвицким.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s(N)T} R'_N(T) = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-(s+s(N))T} R'_N(T) dt = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{s+s(N)}{k(s+s(N)) - N} - 1 \right] = \quad (21)$$

$$= \frac{s(N)}{k'(s(N))}.$$

Из (20) и (21) следует (19).

Для доказательства второго утверждения (15) воспользуемся соотношением (3) § 2.4 для резольвенты:

$$R_N(T) = R(T) + N \int_0^T R(T-y) R_N(y) dy. \quad (22)$$

Введем для краткости записи обозначение: $G_T = N e^{s_0 T}$. Напомним, что здесь $s_0 < 0$ и, следовательно, G_T экспоненциально убывает к нулю при $T \rightarrow \infty$. Из (22), очевидно, следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_{G_T}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} R(T) = -\frac{1}{M\lambda_1(1)}. \quad (23)$$

Дифференцируя соотношение (22) по T , получаем

$$R'_N(T) = R'(T) + NR'_N(T) + N \int_0^T R'(T-x) R_N(x) dx. \quad (24)$$

Используя это соотношение, найдем предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_0 T} R'_{G_T}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_0 T} R'(T) +$$

$$+ \lim_{T \rightarrow \infty} N \left[R_{G_T}(T) + \int_0^T R'(T-x) R_{G_T}(x) dx \right]. \quad (25)$$

Вычислим предел интеграла:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T R'(T-x) R_{G_T}(x) dx = \lim_{T \rightarrow \infty} R_{G_T}(T) \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T R'(x) dx =$$

$$= -\frac{1}{M\lambda_1(l)} \lim_{T \rightarrow \infty} [R(T) - 1] = \frac{1}{M\lambda_1(l)} \left[1 + \frac{1}{M\lambda_1(l)} \right]. \quad (26)$$

Далее, учитывая (7), (9), (23) и (26), получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-s_0 T} R'_{G_T}(T) = \frac{1}{\mu_0} + \frac{\lambda}{[M\lambda_1(l)]^2}. \quad (27)$$

Теперь можно вычислить предел производящей функции величины θ_x^T (см. (3) § 3.7), используя (23) и (27):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \exp[-\lambda e^{s_0 T} \theta_x^T] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[1 - \lambda e^{s_0 T} \left[\frac{R_{G_T}(T)}{R'_{G_T}(T)} R_{G_T}(x) - \right. \right. \quad (28)$$

$$\left. \left. - \int_0^x R_{G_T}(y) dy \right] \right] = 1 - \frac{\lambda / M\lambda_1(l)}{\frac{1}{\mu_0} + \lambda / [M\lambda_1(l)]^2} R(x).$$

Учитывая, что $W(x) = -M\lambda_1(l)R(x)$ и обозначая $C = [M\lambda_1(l)]^2 / \mu_0$, после элементарных преобразований (28) приводим к (15).

Для доказательства третьего утверждения теоремы (17) сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма. При $M\lambda_1(l) = 0$ имеют место следующие предельные соотношения ($\alpha = \frac{\lambda}{\mu_0^2}$):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} R_{\lambda T^{-2}}(uT) = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda}} \operatorname{sh} u \sqrt{\lambda \alpha}; \quad (29)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R'_{\lambda T^{-2}}(uT) = \alpha \operatorname{ch} u \sqrt{\lambda \alpha}; \quad (30)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lambda T^{-2} \int_0^{uT} R_{\lambda T^{-2}}(x) dx = \alpha \sqrt{\lambda \alpha} - 1. \quad (31)$$

Легко заметить, что правые части (30) и (31) можно получить дифференцированием и соответственно интегрированием правой части (29). Для вычисления пределов (29)–(31) воспользуемся представлением резольвенты в виде ряда (см. (1) § 2.4)

$$R_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_0^{(n+1)*}(x), \quad (32)$$

в котором можно почленно дифференцировать, интегрировать и почленно переходить к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$.

Напомним (см. свойство 5 потенциала в § 2.3), что потенциал $R_0(x)$ есть функция восстановления абсолютно непрерывного распределения $F_1(x) = \frac{1}{m} \int_0^x (1-F(y)) dy$ с математическим ожиданием $d = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x dF_1(x)$. Поэтому применение тауберовых теорем [21, стр. 508] позволяет легко получить следующие предельные соотношения:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2n-1}} R_0^{n*}(T) = \frac{d^n}{(2n-1)!}, \quad n \geq 1; \quad (33)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2n}} R_0^{n*}(T) * R_0'(T) = \frac{d^{n+1}}{(2n)!}, \quad n \geq 0; \quad (34)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2n+1}} R_0^{n*}(T) * \int_0^T R_0(x) dx = \frac{d^{n+1}}{(2n+2)!}, \quad n \geq 0. \quad (35)$$

Теперь из (32) и (33), переходя почленно к пределу, получаем (29):

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} R_{\lambda T^{-2}}(\alpha T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T^{2n+1}} R_0^{(n+1)*}(\alpha T) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n d^{n+1} \alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{d}{\lambda}} \operatorname{sh} \alpha \sqrt{d \lambda}. \end{aligned}$$

Дифференцируя (32) почленно и переходя к пределу с учетом (32) и (34), получаем (30):

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} R'_{\lambda T^{-2}}(uT) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\Gamma(2n)} R_0^{n*}(uT) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\Gamma(2n)} R_0^{n*}(uT) * R'_0(uT) \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n d^{n+1} u^{2n}}{(2n)!} = d \operatorname{ch} u \sqrt{\lambda d}. \end{aligned}$$

Аналогично, интегрируя почленно (32) и учитывая (35), получаем в пределе (31):

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda \int_0^T R_{\lambda T^{-2}}(x) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(2n+2)} R_0^{n*}(uT) * \\ &* \int_0^{uT} R_0(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} d^{n+1} u^{2n+2}}{(2n+2)!} = \operatorname{ch} u \sqrt{\lambda d} - 1. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить третье утверждение теоремы (17) нужно вычислить

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} M \exp \left[\lambda T^{-2} \theta_{uT}^T \right] &= 1 - \lim_{T \rightarrow \infty} \lambda T^{-2} \left[\frac{R_{\lambda T^{-2}}(T)}{R'_{\lambda T^{-2}}(T)} R_{\lambda T^{-2}}(uT) - \right. \\ &\left. - \int_0^{uT} R_{\lambda T^{-2}}(x) dx \right], \end{aligned}$$

используя (29)-(31). Имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M \exp \left[-\lambda T^{-2} \theta_{uT}^T \right] = 1 - \lambda \frac{\sqrt{\frac{d}{\lambda}} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda d}}{d \operatorname{ch} \sqrt{\lambda d}} \sqrt{\frac{d}{\lambda}} \operatorname{sh} u \sqrt{\lambda d} + \operatorname{ch} u \sqrt{\lambda d} - 1 =$$

$$= (\operatorname{ch} u \sqrt{\lambda d} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda d} - \operatorname{sh} u \sqrt{\lambda d} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda d}) / \operatorname{ch} \sqrt{\lambda d} = \frac{\operatorname{ch} (1-u) \sqrt{\lambda d}}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda d}}.$$

Обсуждение результатов. Предельные соотношения, приведенные в теореме 2, имеют важную для практических приложений интерпретацию.

1°. В случае положительного течения ($M\lambda_1(t) > 0$), т.е. когда снос процесса $\lambda_1(t) = \lambda(t) - t$ в среднем направлен в сторону поглощающего уровня $x > 0$, распределение момента θ_x^T достижения уровня x при удалении отражающего экрана на $-\infty$ асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) такое же, как и распределение момента τ^x достижения уровня x процессом $\lambda_1(t)$ без отражения.

В то же время при $x \rightarrow \infty$ в силу закона больших чисел τ^x/x сходится к постоянной $1/M\lambda_1(t)$.

Таким образом, заключаем, что и θ_x^T/x сходится по вероятности к постоянной $1/M\lambda_1(t)$ при $T \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$.

2°. В случае отрицательного течения ($M\lambda_1(t) < 0$), т.е. когда снос процесса $\lambda_1(t) = \lambda(t) - t$ в среднем направлен в сторону отражающего экрана, предельный результат (13) можно переписать таким образом:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P\{e^{s_0^T \theta_x^T} \leq t\} = 1 - W(x) + W(x)[1 - e^{-ct}]. \quad (36)$$

Иначе говоря, распределение нормированного момента $e^{s_0^T \theta_x^T}$ достижения уровня $x > 0$ при удалении отражающего экрана на $-\infty$ асимптотически (при $T \rightarrow \infty$) экспоненциально с параметром экспоненты $C = [M\lambda_1(t)]^2 / \alpha_0$ и атомом в нуле, равном $1 - W(x) = P\{\max_{t \geq 0} \lambda_1(t) \geq x\}$. Происходит как бы расщепление траекторий процесса с отражением на два типа. К первому типу траекторий относятся такие, для которых $\max_{t \geq 0} \lambda_1(t) \geq x$. На траекториях первого типа θ_x^T асимптотически порядка $O(x)$. Поэтому $e^{s_0^T \theta_x^T}$ стремится экспоненциально к нулю. Множество таких траекторий имеет вероятность $1 - W(x) = P\{\max_{t \geq 0} \lambda_1(t) \geq x\}$, что и составляет атом в нуле предельного распределения (36).

На траекториях второго типа, для которых $\max_{t \geq 0} \lambda_1(t) < x$,

достижение уровня x происходит благодаря многократному отражению, за счет чего накопится время достижения порядка $O(e^{-s_0 T})$, и тогда естественно ожидать, что $e^{s_0 T} \theta_x^T$ асимптотически будет иметь показательное распределение на множестве траекторий, вероятность которого $W(x) = P\{\max_{t>0} \lambda_1(t) < x\}$.

Приведенные вероятностные соображения качественно поясняют предельный результат (36), но, конечно, не дают ни доказательства (36), ни даже возможности вычисления параметра ζ предельного показательного распределения.

Отметим еще одно замечательное свойство предельного распределения (15). Так как $W(x) = -M \lambda_1(t) R(x)$, а потенциал $R(x)$ однозначно определяет резольвенту $R_N(x)$, то, следовательно, по предельному распределению (15) однозначно восстанавливается допредельное распределение (3) § 3.7 величины $\theta_{x_0}^T$.

3. В третьей из возможных ситуаций, рассмотренных в теореме 2, когда отсутствует течение ($M \lambda_1(t) = 0$), предельный результат (17) также имеет простую вероятностную интерпретацию.

Легко показать, что для v_u — момента достижения винеровским процессом w_t с $w_0 = u$ ($0 < u \leq 1$), $M w_t = 0$ и $D w_t = \sigma^2 t$ — поглощающей границы в точке $u = 0$ при наличии отражающего экрана в точке $u = 1$ производящая функция совпадает с правой частью (17):

$$M e^{-\lambda v_u} = \operatorname{ch}((1-u)\sqrt{\lambda d}) / \operatorname{ch} \sqrt{\lambda d}, \quad (37)$$

$$\lambda = \frac{2}{\sigma^2}.$$

Действительно, метод потенциала (см. § 1.4 п.3) для производящей функции $G_N(u) = M e^{-\lambda v_u}$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 G_N(u)}{du^2} - \frac{2\lambda}{\sigma^2} G_N(u) = 0, \quad 0 \leq u < 1 \quad (38)$$

с граничными условиями

$$G_N(0) = 1, \quad \left. \frac{dG_N(u)}{du} \right|_{u=1} = 0. \quad (39)$$

Легко проверить, что функция (37) дает решение задачи (38)–(39).

Таким образом, в этом случае θ_{nT}^T / T^2 асимптотически имеет распределение, совпадающее с распределением v_{μ} . Этот результат объясняется тем, что при $M\lambda_1(t) = 0$ процесс $\lambda_1(tT^2)/T$ сходится (в смысле сходимости конечномерных распределений) к винеровскому процессу w_t . Следовательно, можно ожидать, что и функционал θ_{nT}^T / T^2 от процесса $\lambda_1(tT^2)/T$ сходится к соответствующему функционалу v_{μ} от винеровского процесса w_t .

Отметим, в заключение, что все три рассмотренные ситуации имеют аналогию в теории ветвящихся процессов. Случай $M\lambda_1(t) > 0$ соответствует надкритической ситуации; при $M\lambda_1(t) = 0$ имеет место критическая ситуация; при $M\lambda_1(t) < 0$ ситуация докритическая.

Глава 4
ПОТЕНЦИАЛ И РЕЗОЛЬВЕНТА
РЕШЕТЧАТОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ
НЕПРЕРЫВНОГО СНИЗУ

Настоящая глава в определенном смысле аналогична гл. 2, в которой изучались потенциал и резольвента сложного пуассоновского процесса со сносом и положительными скачками. Вместе с тем решетчатый вариант имеет свои специфические особенности. Кроме того, в отличие от подхода, рассмотренного в гл. 2, здесь для определения потенциала и резольвенты используется идея аналитического продолжения символа производящего оператора. Эта идея была проиллюстрирована в § 1.2 на примере бернуллиевского случайного блуждания. Построение потенциала и резольвенты с помощью аналитического продолжения символа производящего оператора позволяет избежать ограничений, введенных в гл. 2 при построении потенциала в виде асимптотического представления.

Результаты настоящей главы получены совместно с аспирантом С.В. Дьячковским.

§ 4.1. Определение и общие свойства потенциала

Напомним (см. § 1.3), что решетчатое случайное блуждание, непрерывное снизу, задается последовательностью сумм

$$A_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1; \quad A_0 = 0 \quad (1)$$

независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин ξ_k , удовлетворяющих следующему условию:

$$P\{\xi_k \geq -1\} = 1; \quad P\{\xi_k = -1\} = q, \quad 0 < q < 1. \quad (2)$$

Введем производящую функцию случайных величин ξ_k :

$$p(s) = M s^{\xi_k} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n + q s^{-1}. \quad (3)$$

В принятых здесь обозначениях $P\{\xi_k \geq 0\} = p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 - q > 0$.

Производящий оператор дискретного непрерывного снизу случайного блуждания $\{A_n, n \geq 0\}$ задается соотношением

$$Ku_k = [p(s) - 1]u_k = \sum_{n=0}^{\infty} p_n u_{k-n} + q u_{k+1} - u_k. \quad (4)$$

Здесь S — оператор сдвига: $Su_t = u_{t-1}$.

Символом оператора K служит функция $k(s) = p(s) - 1$, которая, как легко понять, аналитическая внутри единичного круга $|s| < 1$, за исключением точки $s = 0$, в которой $k(s)$ имеет простой полюс.

Определение. Потенциалом дискретного блуждания (1) на полуоси $k \geq 0$ назовем последовательность $\{R_k; k \geq 0\}$, производящая функция которой $R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k R_k$ выражается через символ $k(s)$ производящего оператора K соотношением

$$R(s) = 1/k(s); \quad k(s) = p(s) - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n + q s^{-1} - 1. \quad (5)$$

Прежде всего возникает вопрос корректности такого определения потенциала, т.е. вопрос о возможности разложения $1/k(s)$ в ряд только по неотрицательным степеням s в некоторой окрестности нуля. Положительный ответ на этот вопрос немедленно следует, если записать (5) в виде

$$R(s) = \frac{s}{k_1(s)}, \quad k_1(s) = s k(s) = q + \sum_{n=0}^{\infty} s^{n+1} p_n - s. \quad (6)$$

Из вида функции $k_1(s)$ с очевидностью следует ее аналитичность в единичном круге и более того $k_1(s) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $s = 0$.

Из определения потенциала следуют важные его свойства.

Свойство 1. Потенциал $R = \{R_k, k \geq 0\}$ является единственным решением на полуоси $k \geq 0$ уравнения

$$kR = qR_{k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n R_{k-n} - R_k = \delta_k, \quad k \geq 0, \quad (7)$$

при условии

$$R_k = 0, \quad k \leq -1. \quad (8)$$

Здесь последовательность $\delta_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases}$.

Доказательство следует из того, что (7) можно переписать с учетом (8) в виде

$$qR_{k+1} + \sum_{n=0}^k p_n R_{k-n} - R_k = \delta_k, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Решая это уравнение в производящих функциях, получим для $R(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n R_n$ выражение (5). Единственность решения задачи (7)-(8) следует из (8) и рекуррентных соотношений

$$qR_{k+1} = \delta_k + R_k - \sum_{n=0}^k p_n R_{k-n}, \quad k \geq 0, \quad (10)$$

однозначно определяющих R_{k+1} при заданных значениях $R_n, n \leq k$.

Отметим полезное в дальнейшем нормирующее условие

$$R_1 = 1/q. \quad (11)$$

Свойство 2. Общее решение стандартной граничной задачи на полуоси $k > 0$:

$$k u_k = q u_{k+1} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n u_{k-n} - u_k = \varphi_k, \quad k \geq 1 \quad (12)$$

с условием

$$u_k = 0, \quad k \leq 0 \quad (13)$$

представимо в виде

$$u_k = C R_k + \sum_{n=0}^k R_{k-n} \varphi_n, \quad k \geq 1. \quad (14)$$

Здесь C - произвольная постоянная.

Заметим, что "сдвинутая" граничная задача

$$k u_k = \varphi_k, \quad k \geq 0; \quad u_k = 0, \quad k < 0$$

имеет представление общего решения в виде

$$u_k = C R_{k+1} + \sum_{n=0}^k R_{k+1-n} \varphi_n.$$

Приведенные свойства потенциала являются основными при решении граничных задач для решетчатого случайного блуждания, описываемого суммами (1).

Для доказательства свойства 2 следует убедиться в том, что свертка

$$u_k = \sum_{n=0}^k R_{k-n} \varphi_n \quad (15)$$

удовлетворяет уравнению (12). Непосредственные вычисления с учетом условий (8) и (11) дают

$$\begin{aligned} K \left[\sum_{n=0}^k R_{k-n} \varphi_n \right] &= q \sum_{n=0}^{k+1} R_{k+1-n} \varphi_n + \sum_{n=0}^k \rho_n \sum_{m=0}^{k-n} R_{k-n-m} \varphi_m - \\ &- \sum_{n=0}^k R_{k-n} \varphi_n = \varphi_k + q \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n} R_{n+1} + \sum_{m=0}^k \varphi_m \sum_{n=0}^{k-m} \rho_n R_{k-n-m} - \\ &- \sum_{n=0}^k R_{k-n} \varphi_n = \varphi_k + q \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n} R_{n+1} + \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n} \sum_{m=0}^n \rho_m R_{n-m} - \\ &- \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n} R_n = \varphi_k + \sum_{n=1}^k \varphi_{k-n} K R_n = \varphi_k. \end{aligned}$$

В одном важном для приложений случае потенциал имеет простую вероятностную интерпретацию (см. § 3.1).

Введем функционал от последовательности (1)

$$\bar{\lambda} = \sup_{n \geq 0} \lambda_n. \quad (16)$$

Свойство 3. Если $P\{\bar{\lambda} < \infty\} = 1$, тогда

$$R_k = \frac{P\{\bar{\lambda} < k\}}{q P\{\bar{\lambda} = 0\}}, \quad k \geq 1. \quad (17)$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя потенциал в этом случае совпадает с распределением максимума последовательности (1). Напомним [3, стр. 136], что распределение $P\{\bar{\lambda} < k\}$ совпадает со стационарной мерой случайного блуждания на полуоси $k \geq 0$, описываемого последовательностью

сумм (1) с задерживающим экраном в нуле (см. § 5.3). Это обстоятельство используется в приложениях и объясняет важную роль распределения функционала $\bar{\chi}$. Соотношение (17) можно принять за определение потенциала в этом случае.

Для доказательства свойства 3 введем индикаторы случайных событий $I(\bar{\chi} < k)$ и составим для них стохастическое соотношение с учетом первого скачка:

$$I(\bar{\chi} < k) = I(\xi_1 < k) I(\bar{\chi} < k - \xi_1). \quad (18)$$

Переходя в (18) к математическим ожиданиям, получим для распределения

$$W_k = P\{\bar{\chi} < k\}, \quad k > 0 \quad (19)$$

соотношение

$$W_k = q W_{k+1} + \sum_{n=0}^{k-1} p_n W_{k-n}, \quad k \geq 1, \quad (20)$$

которое с учетом $W_k = 0, k \leq 0$ эквивалентно уравнению

$$k W_k = 0, \quad k \geq 1, \quad W_k = 0, \quad k \leq 0. \quad (21)$$

Из свойства 2 потенциала отсюда немедленно следует, что

$$W_k = C R_k. \quad (22)$$

Константу C находим из нормирующего условия (11):

$$C = q W_1 = q P\{\bar{\chi} = 0\}. \quad (23)$$

Известно [3, стр. 118], что $P\{\bar{\chi} = 0\} > 0$ при $P\{\bar{\chi} < \infty\} = 1$, так что $C \neq 0$. Из (22) и (23) следует (17).

В случае $M \xi_n \leq 0$ из определения потенциала следует его представление через функцию восстановления распределения, не-собственного при $M \xi_n < 0$.

Свойство 4. При $M \xi_n \leq 0$ имеет место следующее представление производящей функции потенциала:

$$R(s) = \frac{1}{1 - D_G(s)} \cdot \frac{1}{q(s^{-1} - 1)}, \quad (24)$$

где

$$\beta_0(s) = \frac{\beta_0(s) - \beta_0(1)}{q(1-s^{-1})}; \quad \beta_+(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \beta_n. \quad (25)$$

При этом

$$\beta_0(1) = 1 \quad \text{при} \quad M \xi_n = 0 \quad (26)$$

и

$$\beta_0(1) = 1 + M \xi_n / q < 1 \quad \text{при} \quad M \xi_n < 0.$$

Действительно, используя (5), легко проверить, что

$$k(s) = (1 - \beta_0(s))q(s^{-1} - 1). \quad (27)$$

Представление (24) может быть использовано при изучении асимптотического поведения потенциала на бесконечности, чему посвящен следующий параграф.

§ 4.2. Асимптотическое представление потенциала

Для доказательства предельных теорем важную роль играет изучение асимптотического поведения (при $k \rightarrow +\infty$) потенциала.

Прежде всего можно воспользоваться аналитическими свойствами производящей функции. Аналогично тому, как это было сделано в гл. 2 для потенциала сложного пуассоновского процесса при дополнительных ограничениях на функцию распределения скачков, мы построим здесь асимптотическое представление потенциала случайного блуждания, описываемого последовательностью (1) § 4.1.

Вначале сформулируем лемму о факторизации символа $k(s)$. Будем предполагать выполненным условие Крамера:

$$\sup \{s > 0 : k(s) < \infty\} = s_+ > 1, \quad k(s_+) > 0. \quad (1)$$

В этом случае в силу выпуклости функции $k(s)$ в интервале вещественной оси, содержащей точку $s = 1$, уравнение

$$k(s) = 0 \quad (2)$$

имеет два вещественных корня: $s = 1$ и $s = s_0$. Будем различать три случая:

1. $M_{\xi_k} > 0$, тогда $0 < s_0 < 1$ (положительное течение);
 2. $M_{\xi_k} < 0$, тогда $1 < s_0 < s_+$ (отрицательное течение);
 3. $M_{\xi_k} = 0$, тогда $s_0 = 1$ (нулевое течение).

Лемма (о факторизации). При выполнении условия (1) при $M_{\xi_k} = a \neq 0$ символ $k(s)$ представим в виде

$$k(s) = (s^{-1} - 1)(1 - s/s_0)g(s), \quad (3)$$

где

$$g(s) = \frac{s_0}{1-s_0} \left[\frac{\rho_+(s) - \rho_+(s_0)}{1-s/s_0} + \frac{\rho_+(s) - \rho_+(1)}{s-1} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} s^n g_n, \quad (4)$$

$$g_n = \frac{s_0}{1-s_0} \sum_{m=n+1}^{\infty} (1-s_0^{m-n}) \rho_m; \quad \rho_+(s) = \sum_{m=0}^{\infty} s^m \rho_m. \quad (5)$$

При $M_{\xi_k} = 0$ имеет место следующее разложение символа:

$$k(s) = (s - 2 + s^{-1})g_0(s), \quad (6)$$

где

$$g_0(s) = \frac{\rho_+(s) - (1-s^{-1})\rho_+(1) - \rho_+(1)}{s - 2 + s^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n g_n, \quad (7)$$

$$g_n = \sum_{m=n}^{\infty} (m-n) \rho_m. \quad (8)$$

Разложения (3) и (6) с учетом (4) и (7) проверяются непосредственным вычислением правых частей и сведения их к виду (см. (5) § 4.1):

$$k(s) = g s^{-1} + \rho_+(s) - 1. \quad (9)$$

При этом следует воспользоваться соотношением

$$\rho_+(s_0) = 1 - q s_0^{-1}, \quad (10)$$

которое следует из уравнения $k(s_0) = 0$ и вида символа (9). Выражения для коэффициентов g_n в формулах (5) и (8) являются очевидными следствиями выражений (4) и (7).

Обратим внимание, что функции $g(s)$ и $g_0(s)$ разлагаются в ряды только по неотрицательным степеням s .

Нам понадобится еще в дальнейшем ряд соотношений, вытекающих из леммы о факторизации, которые мы приведем здесь для ссылки:

$$g(1) = \frac{s_0}{1-s_0} \alpha; \quad g_0(1) = \frac{1}{2} \rho''(1); \quad (11)$$

$$\rho_+(1) = \rho - q; \quad \rho'_+(1) = M \xi_n + q; \quad \rho''_+(1) = \rho''(1) - 2q. \quad (12)$$

Теперь мы можем построить асимптотическое представление потенциала.

Теорема. При выполнении условия (1) имеет место представление потенциала при $M \xi_n = \alpha \neq 0$:

$$R_k = -\frac{1}{\alpha} [1 - R s_0^{-k} - V_k], \quad k \geq 0; \quad (13)$$

при $M \xi_n = 0$

$$R_k = \frac{1}{g_0(1)} [k - R_0 - V_k^0], \quad k \geq 0. \quad (14)$$

Здесь постоянные Крамера R и R_0 определяются соотношениями

$$R = \frac{g(1)}{g(s_0)}; \quad R_0 = \frac{g'_0(1)}{g_0(1)}. \quad (15)$$

Последовательности типа погранслоя $\{V_k, k \geq 0\}$ и $\{V_k^0, k \geq 0\}$ определяются своими производящими функциями при $|s| < s_+$:

$$V(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n V_n = \left[\frac{g(s) - g(1)}{s^{-1} - 1} + R \frac{s_0 g(s) - s g(s_0)}{s - s_0} \right] / g(s); \quad (16)$$

$$V_0(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n V_n^0 = \left[\frac{g_0(s) - (1-s^{-1})g_0'(1) - g_0(1)}{s-2+s^{-1}} - R_0 \frac{g_0(s) - g_0(1)}{s-1} \right] / g_0(s). \quad (17)$$

Следствие. Производящие функции погранслоев представимы в виде

$$V(s) = \alpha \frac{s\Pi(s) - s_0\Pi(s_0)}{s - s_0} - 1; \quad V_0(s) = \frac{g_0(1)}{q} \frac{s\Pi_0(s) - \Pi_0(1)}{s-1}, \quad (18)$$

где

$$\Pi(s) = \frac{1}{1 - \mathbb{D}(s)} - \frac{s_0 - 1}{\alpha(1-s)}; \quad \mathbb{D}(s) = \frac{s\rho_+(s) - s_0\rho_+(s_0)}{s - s_0}, \quad (19)$$

$$\Pi_0(s) = \frac{1}{1 - \mathbb{D}_0(s)} - \frac{q}{g_0(1)(1-s)}; \quad \mathbb{D}_0(s) = \frac{\rho_+(s) - \rho_+(1)}{q(1-s^{-1})}. \quad (20)$$

Доказательство теоремы. Используя лемму о факторизации символа, строим разложение

$$1/k(s) = -\frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{s^{-1}-1} - \frac{R}{1-s/s_0} - V(s) \right], \quad (21)$$

в котором константа Крамера R определяется из тождества (21) следующим образом. Используя формулу (16), вычисляем

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{-1}-1} - \frac{R}{1-s/s_0} - V(s) &= \left[\frac{g(1)}{s^{-1}-1} - R \frac{sg(s_0)/s_0}{1-s/s_0} \right] / g(s) = \\ &= \frac{g(1) - Rg(s_0)/s_0 + s[Rg(s_0)/s_0 - g(1)/s_0]}{(s^{-1}-1)(1-s/s_0)g(s)}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициент при s в числителе нулю, получаем выражение (15) для константы Крамера R и далее с учетом (3) и (11)

$$\frac{1}{s^{-1}-1} - \frac{R}{1-s/s_0} = V(s) = \frac{g(1)(1-s_0^{-1})}{k(s)} = -\frac{R}{k(s)}, \quad (22)$$

что соответствует (13) в производящих функциях.

В случае $M_{\frac{1}{n}} = 0$ поступаем аналогично. Используя (17), вычисляем

$$\frac{1}{s-2+s^{-1}} + \frac{R_0}{1-s} = V_0(s) = \frac{[(1-s^{-1})g_0'(1)+g_0(1) - R_0 g_0(1)]}{s-2-s^{-1}} \cdot \frac{1}{g_0(s)} =$$

$$= \frac{(1-s^{-1})[g_0'(1)-R_0 g_0(1)]+g_0(1)}{(s-2+s^{-1})g_0(s)}$$

Приравняв нулю коэффициент при $(1-s^{-1})$, получаем выражение (15) для константы Крамера R_0 в далее соотношении

$$\frac{1}{s-2+s^{-1}} + \frac{R_0}{1-s} = V_0(s) = \frac{g_0(1)}{k(s)}, \quad (23)$$

что соответствует (14) в производящих функциях.

Для доказательства формул (18)–(20), приведенных в следствии, поступим следующим образом. Прежде всего при $M_{\frac{1}{n}} = a \neq 0$, учитывая (4) и (10), вычисляем

$$1 - (1-s)g(s)/s_0 = 1 - \frac{1}{1-s_0} \left[\frac{1-s}{1-s/s_0} (\rho_+(s) - \rho_+(s_0)) - \rho_+(s) + \rho_+(1) \right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-s_0} \left[(s_0-1) \frac{s\rho_+(s) - s_0\rho_+(s)}{s-s_0} - s_0+1 \right] = \frac{s\rho_+(s) - s_0\rho_+(s)}{s-s_0} = D(s).$$

И заметим, что

$$D(t)=1, D'(t)=\frac{c}{1-s_0} > 0. \quad (24)$$

Так что $D(s)$ есть производящая функция решетчатого распределения вероятностей неотрицательной случайной величины.

Теперь нетрудно убедиться в том, что производящая функция погранслоя (16) преобразуется к виду (18) с учетом (19).

Аналогично при $M \frac{1}{q} = 0$, учитывая (7) и (12), вычисляем

$$1 - (1-s)g_0(s)/q = 1 - \frac{D_r(s) - (1-s^{-1})q - D_r(1)}{q(s^{-1}-1)} = \frac{D_r(s) - D_r(1)}{q(1-s^{-1})} = D_0(s), \quad (25)$$

причем

$$D_0(1) = 1; D_0'(1) = g_0(1)/q; D_0''(1) = 2g_0'(1)/q. \quad (26)$$

Так что $D_0(s)$ есть производящая функция решетчатого распределения вероятностей неотрицательной случайной величины.

Нетрудно убедиться в том, что производящая функция погранслоя (17) преобразуется к виду (18) с учетом (20), (25) и (26). Действительно, из представления погранслоя (17) имеем с учетом (25) и (26):

$$V_0(s) = \frac{R_0}{s-1} + \frac{g_0(s) - g_0(1)}{(s-2+s^{-1})g_0(s)} = \frac{R_0}{s-1} + \frac{g_0(1)}{q} \cdot \frac{D_0(s)}{1-s^{-1}}. \quad (27)$$

Замечая, что

$$D_0(1) = \frac{g_0'(1)}{g_0^2(1)} q = \frac{R_0 q}{g_0(1)}, \quad (28)$$

получаем (18).

Замечание 1. Из теории восстановления [21, гл. 13] следует, что $\Pi(s)$ и $\Pi_0(s)$ — аналитичны в круге $|s| < s_*$, так что их коэффициенты в разложении по положительным степеням убывают со скоростью членов геометрической прогрессии со знаменателем $s_* = s_* - \epsilon > 1$ ($\epsilon > 0$ — любое сколь угодно малое число). Из представления (18) следует, что и последователь-

ности V_k и V_k^0 убывают с такой же скоростью, чем и оправдывается их название погранслоями.

2. Для погранслоев имеет место представление

$$V_k = \alpha \sum_{m=k}^{\infty} s_0^{m-k} \Pi_k, \quad k \geq 1; \quad V_0 = \alpha \Pi(s_0) - 1 \quad (28)$$

и

$$V_k^0 = \frac{g_0(1)}{q} \sum_{m=k}^{\infty} \Pi_k^0, \quad k \geq 0, \quad (29)$$

которые следуют из формул (18).

3. Представление погранслоев (18) через функции восстановления позволяет довольно легко вычислять значения V_k , в частности, легко получить следующие значения для V_0 и V_1 :

$$V_0 = \alpha \Pi(s_0) - 1 = \frac{\alpha}{1 - \beta(s_0)} = -R; \quad V_1 = \alpha \frac{\Pi(s_0) - \Pi_0}{s_0} = 1 - \frac{\alpha}{q} - \frac{R}{s_0}, \quad (30)$$

а также

$$V_0^0 = \frac{g_0(1)}{q} \Pi_0(1) = R_0; \quad V_1^0 = 1 + R_0 - \frac{g_0(1)}{q}. \quad (31)$$

Из асимптотического представления потенциала, приведенного в теореме, вытекает.

Свойство 5. В условиях Крамера (1) имеет место следующее предельное поведение потенциала:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_0^k R_k = \frac{1 - s_0}{s_0 q(s_0)} \quad \text{при } M_{\gamma n}^x > 0; \quad (32)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = -\frac{1}{M_{\gamma n}^x} \quad \text{при } M_{\gamma n}^x < 0; \quad (33)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k / k = 2 / M_{\gamma n}^x{}^2 \quad \text{при } M_{\gamma n}^x = 0. \quad (34)$$

Заметим, что (32)–(34) имеют место и при более слабых предположениях, чем условие Крамера (1), а именно, при условии существования правых частей (32)–(34).

Как и в случае пуассоновского случайного блуждания, свойство 5 будет использовано в гл. 5 для получения предельных теорем для граничных функционалов.

§ 4.3. Резольвента

Для решения более общих уравнений вида $Ku - \lambda u = \varphi$ введем резольвенту $R_k(\lambda)$ решетчатого случайного блуждания на полуоси $k \geq 0$, задавая ее производящую функцию.

Определение. Резольвента $R_k(\lambda)$ ($k \geq 0$) решетчатого случайного блуждания задается соотношением

$$r_{R_k}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k R_k(\lambda) = 1/K_{\lambda}(s) = [k(s) - \lambda]^{-1} = [p_r(s) + q s^{-1} - 1 - \lambda]^{-1}. \quad (1)$$

Из определения резольвенты $R(\lambda) = \{R_k(\lambda), k \geq 0\}$ немедленно вытекает ее связь с потенциалом $R = \{R_k, k \geq 0\}$.

Свойство 1. Резольвента $R(\lambda)$, представима через потенциал R рядом

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R^{(n+1)*}; \quad R^{(n+1)*} = R^{n*} * R, \quad (2)$$

где свертка $W = U * V$ двух последовательностей $u = \{u_k, k \geq 0\}$ и $v = \{v_k, k \geq 0\}$, как обычно, означает последовательность $w = \{w_k, k \geq 0\}$, задаваемую соотношением

$$w_k = \sum_{m=0}^k u_{k-m} v_m, \quad k \geq 0. \quad (3)$$

Из свойств потенциала следует, что ряд в (2) сходится, по крайней мере, в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$ и определяет аналитическую функцию в некоторой области комплексной плоскости, причем $R(0) = R$ — потенциал.

Свойства резольвенты вытекают из основного соотношения, которому удовлетворяет резольвента:

$$R_k(\lambda) = R_k + \lambda \sum_{m=0}^k R_{k-m} R_m(\lambda), \quad k \geq 0 \quad (4)$$

к которое является очевидным следствием разложения (2).

Учитывая свойства 1 и 2 потенциала (см. § 4.1), получаем следующие результаты.

Свойство 2. Резольвента $R(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda - \lambda I)R(\lambda) = \sum_{m=0}^{\lambda} R_{\lambda-m}(\lambda) \rho_m + q R_{\lambda+1}(\lambda) - (1+\lambda)R_{\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda > 0. \quad (5)$$

Свойство 3. Последовательность $\Phi_{\lambda}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\lambda} R_{\lambda-m}(\lambda) \varphi_m, \quad \lambda \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda - \lambda I)\Phi = \varphi, \quad (6)$$

или в развернутом виде

$$\sum_{m=0}^{\lambda} \varphi_{\lambda-m} \rho_m + q \varphi_{\lambda+1} - (1+\lambda)\varphi_{\lambda} = \varphi_{\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (7)$$

Наконец, как и для резольвенты пуассоновского процесса имеет место резольвентное уравнение

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda) * R(\mu). \quad (8)$$

Применение резольвенты в граничных задачах основано на использовании свойств 2 и 3, объединяя которые мы сформулируем их иначе следующим образом.

Свойство 4. Общее решение уравнения на полуоси $\lambda \geq 0$

$$\lambda u - \lambda u = \varphi; \quad u_{\lambda} = 0, \quad \lambda < 0 \quad (9)$$

представимо в виде

$$u = C_{\lambda} R(\lambda) + R(\lambda) * \varphi, \quad (10)$$

где C_{λ} — произвольный параметр, не зависящий от λ .

В гл. 5 при изучении граничных функционалов от решетчатого случайного блуждания нам придется иметь дело с уравнением вида

$$\lambda \left[\sum_{m=0}^{\infty} \rho_m u_{\lambda-m} + q u_{\lambda+1} \right] - u_{\lambda} = \varphi_{\lambda}, \quad \lambda \geq 0; \quad u_{\lambda} = 0, \quad \lambda < 0, \quad (11)$$

которое в операторной форме можно записать в виде

$$[\lambda K - (1-\lambda)I]u = \varphi.$$

Или иначе

$$(K - (\lambda^{-1} - 1)I)u = \varphi/\lambda.$$

Следовательно, общее решение уравнения (11) представимо через резольвенту в таком виде:

$$u_k = C(x)R_{k+1}(x) + \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^k R_{k+1-m}(x)\varphi_m, \quad k \geq 0; \quad x = \lambda^{-1} - 1. \quad (12)$$

Аналитические свойства производящей функции $R_\lambda(s)$ резольвенты позволяют получить представление резольвенты через функцию распределения скачков.

Свойство 5. Для резольвенты $R_k(\lambda)$, $k \geq 1$ имеет место представление

$$R_k(\lambda) = -[s(\lambda)]^{-k-1} s'(\lambda) - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} D\{\lambda_n = k\}, \quad k \geq 1; \quad (13)$$

$$z = (1 + \lambda)^{-1}.$$

Здесь $s(\lambda)$ — единственный положительный корень уравнения

$$K(s(\lambda)) - \lambda = 0, \quad \lambda > 0, \quad (14)$$

удовлетворяющий условию $s(\lambda) \leq 1$.

Напомним (см. § 4.1), что $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$

$$p(s) = Ms^{\lambda} = p_r(s) + qs^{-1}, \quad k(s) = p(s) - 1.$$

Доказательство. Вычитая из функции $r_\lambda(s) = [k(s) - \lambda]^{-1}$ главную часть ее единственной особенности в единичном круге $|s| < 1$, получаем для нее представление

$$r_\lambda(s) = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)(1 - s(\lambda)/s)} + r_\lambda^0(s), \quad (15)$$

в котором $r_\lambda^0(s)$ — аналитическая в единичном круге с $r_\lambda^0(0) = 0$. С другой стороны, имеет (полагая для упрощения записи $z = (1 + \lambda)^{-1}$)

$$r_{\lambda}(s) = [h(s) - \lambda]^{-1} = [p(s) - (1 + \lambda)]^{-1} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} p^{(n)}(s) = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} M s^{\lambda n} =$$

$$= - \sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s^k \rho\{\lambda_n = k\} = - \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = k\} - \sum_{k=-\infty}^0 s^k \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = k\}. \quad (16)$$

Введем последовательность

$$\rho_k^-(\lambda) = \begin{cases} s'(\lambda) [s(\lambda)]^{-k-1}, & k \leq 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (17)$$

с производящей функцией

$$\rho_{\lambda}^-(s) = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)(1-s(\lambda)/s)}. \quad (18)$$

Тогда из (15)-(17) следует, что

$$- \sum_{k=-\infty}^0 s^k \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = k\} = \rho_{\lambda}^-(s) \quad (19)$$

и

$$- \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = k\} = r_{\lambda}^0(s) - r_{\lambda}(s) = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)(1-s(\lambda)/s)}. \quad (20)$$

Или иначе

$$r_{\lambda}(s) = \frac{s'(\lambda)}{s(\lambda)(1-s(\lambda)/s)} - \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = k\}, \quad (21)$$

откуда немедленно следует (11). Нужно только разложить первое слагаемое в (21) по положительным степеням s .

В качестве следствия представления (13) предельным переходом при $\lambda \rightarrow 0$ получаем представление потенциала через распределение скачков.

Следствие. В условиях (1) § 4.2 имеют место формулы при $M\zeta_k > 0$:

$$R_k = \frac{1}{s_0^{k-1} (1-s_0) g(s_0)} - \sum_{n=0}^{\infty} P\{\lambda_n = k\}; \quad (22)$$

при $M\zeta_k < 0$:

$$R_k = \frac{1}{M\zeta_k} - \sum_{n=0}^{\infty} P\{\lambda_n = k\}. \quad (23)$$

Действительно, если $M\zeta_k > 0$, тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s(\lambda) = s_0$. Если же $M\zeta_k < 0$, тогда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} s(\lambda) = 1$. Из определения корня $s(\lambda)$ следует (см. (14)), что $s'(\lambda) = 1/k'(s(\lambda))$. Из леммы о факторизации § 4.2 вычисляем

$$k'(s) = -(s^{-2}-1)(1-s/s_0)g(s) - (s^{-2}-1)s_0^{-1}g(s) - (s^{-2}-1)(1-s/s_0)g'(s).$$

Подставляя сюда $s = s(\lambda)$ и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, находим при $M\zeta_k > 0$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s'(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 1/k'(s(\lambda)) = 1/k'(s_0) = -\frac{s_0^2}{(1-s_0)g(s_0)}. \quad (24)$$

А при $M\zeta_k < 0$, учитывая, что $k(s) = Ms^{\zeta_k} - 1$, находим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s'(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} 1/k'(s(\lambda)) = 1/k'(1) = \frac{1}{M\zeta_k}. \quad (25)$$

Сравнивая основное представление потенциала, приведенное в теореме § 4.3, с (22) и (23), можно выписать выражение вторых слагаемых в (22) и (23) через погранслой.

Глава 5

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕТЧАТОГО БЛУЖДЕНИЯ

В этой главе потенциал и резольвента дискретного случайного блуждания на полуоси применяются для описания распределений граничных функционалов при наличии одной или двух поглощающих границ, а также при наличии одной поглощающей границы и другого задерживающего экрана. При этом, как и в гл.3, для производящих функций граничных функционалов строится разностное уравнение вида $Ku = \varphi$ или $Ku - \lambda u = \varphi$. Решение этих уравнений представляется в стандартной форме

$CR + R * \varphi$ либо $CR(\lambda) + R(\lambda) * \varphi$. Свойства потенциала и резольвенты, приведенные в гл.4, позволяют получить предельные теоремы при неограниченном удалении одного из экранов.

Несмотря на аналогию с граничными задачами для сложного пуассоновского процесса, дискретное случайное блуждание имеет свои специфические особенности, которые оправдывают их независимое рассмотрение.

Напомним, что в данной главе рассматривается случайное блуждание, описываемое суммами

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad k \geq 1; \quad \lambda_0 = 0$$

независимых одинаково распределенных решетчатых случайных величин ξ_k с производящей функцией

$$p(s) = Ms^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n p_n + q s^{-1}.$$

Однако легко убедиться в том, что рассматриваемый здесь подход применим и для других случаев дискретного случайного блуждания, описанных в § 1.3.

§ 5.1. Момент достижения и величина перескока заданного уровня

Среди различных граничных функционалов от случайных блужданий, описываемых суммами $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 0 \quad (\lambda_0 = 0)$

независимых одинаково распределенных случайных величин, наибольшее внимание привлекает максимум конечного числа сумм, или, что то же самое — момент достижения заданного уровня и величина перескока.

Введем момент достижения заданного уровня $x \geq 0$:

$$\tau_x = \min\{k: \mu_k \geq x\} \quad (1)$$

и величину перескока через уровень $x \geq 0$:

$$\delta_x = \mu_{\tau_x} - x. \quad (2)$$

Совместная производящая функция этих лестничных величин определяется резольventой случайного блуждания $\{\mu_n, n \geq 0\}$ следующим образом.

Теорема. При $|z| \leq 1$ и $|z| \leq 1$ имеет место представление

$$M[z^{\tau_x} z^{\delta_x}] = k_N(x) \left[\frac{z s(z)}{z - s(z)} R_{x+1}(z) + \sum_{k=x+1}^{\infty} z^{k-x} R_k(z) \right], \quad x \geq 0. \quad (3)$$

В частности,

$$M[z^{\tau_0} z^{\delta_0}] = 1 - \frac{1}{z} k_N(x) \frac{z s(z)}{s(z) - z}. \quad (4)$$

Здесь

$$k_N(x) = N M x^{\frac{1}{N}} - 1; \quad k_N(s(z)) = 0.$$

Исходным объектом для доказательства теоремы служат следующие стохастические соотношения для лестничных величин, составленные с учетом первого скачка:

$$\tau_x = 1 + \tau_{x-\mu_1}, \quad x \geq 0; \quad \tau_x = 0, \quad x < 0, \quad (5)$$

$$\delta_x = \delta_{x-\mu_1}, \quad x \geq 0; \quad \delta_x = -x, \quad x < 0.$$

Действительно, число шагов до достижения уровня $x \geq 0$ блужданием с началом в нуле будет на единицу больше числа шагов до достижения уровня x блужданием с началом в точке ξ_1 . Из однородности случайного блуждания момент перескока уровня x из точки ξ_1 совпадает с моментом перескока уровня $x - \xi_1$ из нуля.

Аналогично величина перескока уровня x с началом в нуле имеет такое же распределение, что и величина перескока уровня x с началом в точке ξ_1 . А из однородности случайного блуждания следует, что величина перескока уровня x из точки ξ_1 совпадает с величиной перескока уровня $x - \xi_1$ из нуля. При этом очевидно, что величина перескока принимает значение $\xi_1 - x$; если $\xi_1 - x > 0$.

Введем обозначение для совместной производящей функции лестничных величин

$$\Phi_x(\lambda, z) = M[e^{\lambda x} z^{\tau x}]. \quad (6)$$

Из стохастических соотношений (5), применяя формулу условных математических ожиданий, получаем

$$\Phi_x(\lambda, z) = \lambda \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k \Phi_{x-k}(\lambda, z) + q \Phi_{x+1}(\lambda, z) \right].$$

Или иначе

$$\lambda \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k \Phi_{x-k}(\lambda, z) + q \Phi_{x+1}(\lambda, z) \right] - \Phi_x(\lambda, z) = 0, \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Из дополнительных условий в (5) при $x < 0$ имеем

$$\Phi_x(\lambda, z) = z^{-x} \quad \text{при } x < 0. \quad (8)$$

Чтобы привести задачу (7)-(8) к стандартным граничным условиям, введем функцию

$$\psi_x(\lambda, z) = \Phi_x(\lambda, z) - z^{-x} \quad (-\infty < x < \infty). \quad (9)$$

Тогда для нее получим следующую стандартную задачу:

$$\lambda \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k \psi_{x-k}(\lambda, z) + q \psi_{x+1}(\lambda, z) \right] - \psi_x(\lambda, z) = h_x(\lambda) z^{-x}, \quad x \geq 0 \quad (10)$$

и те условия

$$\psi_x(\lambda, z) = 0, \quad x < 0. \quad (11)$$

Применяя свойство 4 резольвенты (см. § 4.3), получаем решение задачи (10)-(11) в виде

$$\psi_x(\lambda, z) = C(\lambda, z) R_{x+1}(\lambda) - k_N(s) \sum_{k=0}^x R_k(\lambda) z^{k-x}.$$

Учитывая равенство (9), получаем выражение для производящей функции лестничных величин

$$\Phi_x(\lambda, z) = C(\lambda, z) R_{x+1}(\lambda) - k_N(z) \sum_{k=0}^x R_k(\lambda) z^{k-x} + z^{-x}. \quad (12)$$

Принимая во внимание определение резольвенты (см. (1), § 4.3)

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(\lambda) = [k_N(z)]^{-1}, \quad (13)$$

формулу (12) перепишем в виде

$$\Phi_x(\lambda, z) = C(\lambda, z) R_{x+1}(\lambda) + k_N(z) \sum_{k=x+1}^{\infty} z^{k-x} R_k(\lambda), \quad x > 0. \quad (14)$$

Остается определить параметр $C(\lambda, z)$. Полагая в (14) $x=0$, с учетом (13), получаем

$$C(\lambda, z) = [M[\sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k(\lambda)] - 1] \Phi. \quad (15)$$

Переходя в (14) к производящим функциям по $x \geq 0$, получаем

$$\psi(s, \lambda, z) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \Phi_x(\lambda, z) = \left[C(\lambda, z) / s + z \frac{k_N(z) - k_N(s)}{s-z} \right] / k_N(s). \quad (16)$$

Как известно [3], при $\lambda > 0$ функция $k_N(s)$ имеет нуль $s(\lambda)$ в единичном круге $|s| < 1$. Вместе с тем левая часть в (16) регулярна внутри единичного круга $|s| < 1$. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (16) также обращается в нуль при $s = s(\lambda)$. Таким образом, получаем

$$C(\lambda, z) = - \frac{z s(\lambda)}{s(\lambda) - z} k_N(z). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (14), получаем формулу (3). А из (15) и (17) следует формула (4).

Обсуждение результатов. В представлении (3) в удачной форме содержится вся информация о лестничных величинах ε_x и τ_x . Например, полагая $z = 1$, получим производящую функцию момента достижения в виде

$$Mz^{\varepsilon_x} = (z-1) \left[\frac{s(z)}{s(z)-1} R_{x+1}(z) + \sum_{k=x+1}^{\infty} R_k(z) \right]. \quad (18)$$

Сложнее обстоит дело с выводом производящей функции величины перескока. Дело в том, что при $z = 1$ корень $s(z)$ принимает значение $s_0 < 1$, если $M\tau_n > 0$ и значение 1, если $M\tau_n \leq 0$. Поэтому, объединяя формулы (3) и (4) при $z = 1$, мы получаем

$$Mz^{\tau_x} = q [Mz^{\tau_0} - 1] R_{x+1} + k(z) \sum_{k=x+1}^{\infty} z^{k-x} R_k. \quad (19)$$

При этом

$$Mz^{\tau_0} = \begin{cases} 1 - \frac{1}{q} k(z) \frac{z s_0}{s_0 - z}, & M\tau_n > 0; \\ 1 - \frac{1}{q} k(z) \frac{z}{1 - z}, & M\tau_n \leq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Учитывая лемму о факторизации (см. § 4.2), можно выразить распределение лестничной высоты τ_0 через исходное распределение скачков τ_n , аналогично тому, как это было сделано для пуассоновского случайного блуждания в § 3.3.

В качестве важного следствия теоремы сформулируем предельный результат для производящей функции величины перескока.

Следствие. В условиях леммы о факторизации § 4.2 имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Mz^{\tau_x} = \begin{cases} zq(z)/g(1) & \text{при } M\tau_n > 0; \\ xq_0(z)/g_0(1) & \text{при } M\tau_n = 0, \end{cases} \quad (21)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} M[z^{\bar{v}_x} / \bar{v}_x < \infty] = z g(z) / g(1) \quad \text{при } M \xi_{II} < 0. \quad (22)$$

Для доказательства (21) при $M \xi_{II} > 0$ подставим в (19) основное представление потенциала (13) § 4.2 и преобразуем полученное выражение

$$M z^{\bar{v}_x} = -\frac{1}{\alpha} k(z) \frac{z s_0}{z - s_0} [1 - R s_0^{-x-1} - V_{x+1}] -$$

$$-\frac{k(z)}{\alpha} \sum_{k=x+1}^{\infty} z^{k-x} [1 - R s_0^{-k} - V_k] =$$

$$= \frac{k(z) z^2 (1-s_0)}{\alpha (1-x)(s_0-z)} + \frac{k(z) z s_0}{\alpha (z-s_0)} V_{x+1} + \frac{k(z)}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} z^k V_{x+k}. \quad (23)$$

Теперь следует воспользоваться факторизацией символа $k(z)$ см. (3) § 4.2 и учесть (11) § 4.2, а также свойством погранислов: $\lim_{x \rightarrow \infty} V_x = 0$. Предельный переход в (23) при $x \rightarrow \infty$ дает первое из соотношений в (21).

Аналогично вычисляется второе соотношение в (21). Нужно только использовать представление потенциала (14) § 4.2 и факторизацию символа (6) § 4.2.

При $M \xi_{II} < 0$ воспользуемся свойством 3 потенциала (см. § 4.1), которое дает

$$P\{\bar{v}_x < \infty\} = P\{\bar{\mu} > x\} = 1 - q P\{\bar{\mu} = 0\} R_{x+1}. \quad (24)$$

Из свойства 5 потенциала (§ 4.2) и (24) получаем полезное соотношение

$$q P\{\bar{\mu} = 0\} = -M \xi_{II}. \quad (25)$$

Теперь вычисляем

$$M[z^{\tau_x} / \tau_x < \infty] = \frac{z k(z) R_{x+1}}{(1-z)(1+aR_{x+1})} + \frac{k(z)}{1+aR_{x+1}} \sum_{k=1}^{\infty} z^k R_{x+k}. \quad (26)$$

Подставляя сюда основное представление потенциала (13) § 4.2, после преобразований получаем

$$M[z^{\tau_x} / \tau_x < \infty] = \frac{k(z)}{a(1+aR_{x+1})} \left[\frac{z^2(1-s_0)}{(1-z)(s_0-z)} R s_0^{-x-1} + \frac{z}{1-z} V_{x+1} - \sum_{k=1}^{\infty} z^k V_{x+k} \right]. \quad (27)$$

Предельный переход по $x \rightarrow \infty$ с учетом факторизации символа (3) и (11) § 4.1 дает (22).

Таким образом, множитель факторизации $g(z)$ имеет вероятностную интерпретацию: с точностью до нормирующей константы $z g(z)$ — производящая функция предельной величины перескока через бесконечно удаленный барьер.

Предоставляем читателю получить следствия формул (3) и (4), аналогичные тем, которые были получены в § 3.2-3.4.

§ 5.2. Задачи о разорении

Введем два уровня поглощения: верхний $x > 0$ и нижний $y < 0$ и фиксируем расстояние между уровнями $T = x - y$.

Для случайного блуждания, описываемого суммами $\lambda_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $n \geq 0$ ($\lambda_0 = 0$), определим случайные величины: τ_x^+ и τ_y^- — моменты выхода последовательности $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ за пределы отрезка $[y, x]$ через верхний уровень x и через нижний уровень y соответственно:

$$\tau_x^+ = \min\{n: \lambda_n \geq x\}; \quad \tau_y^- = \min\{n: \lambda_n \leq y\}. \quad (1)$$

Введем индикаторы случайных событий, связанных с выходом последовательности $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ за пределы интервала (y, x) через верхний или нижний уровни:

$$I^T(x) = I(\lambda_n > x - T, \forall n \leq \sigma_x^+);$$

$$I_T(x) = I(\lambda_n < x, \forall n \leq \sigma_{x-T}^-). \quad (2)$$

Индикатор $I^T(x)$ принимает значение 1, когда последовательность $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ впервые покидает интервал (y, x) через верхний уровень x в момент σ_x^+ . Индикатор $I_T(x)$ принимает значение 1, когда последовательность $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ впервые выходит за пределы интервала (y, x) через нижний уровень $y = x - T$ в момент σ_y^- .
Введем теперь основные функции, которыми определяются решения задач о разорении. Вероятность разорения:

$$Q^T(x) = MI^T(x) = P\{\lambda_n > x - T, \forall n \leq \sigma_x^+\}, \quad (3)$$

$$Q_T(x) = MI_T(x) = P\{\lambda_n < x, \forall n \leq \sigma_{x-T}^-\} \quad (4)$$

и производящие функции моментов разорения

$$B^T(x, \lambda) = M[\lambda^{\tau_x^+} I^T(x)]; \quad B_T(x, \lambda) = M[\lambda^{\tau_{x-T}^-} I_T(x)]. \quad (5)$$

Теорема. Имеют место следующие соотношения для вероятностей разорения:

$$Q_T(x) = 1 - Q^T(x) = R_x / R_T, \quad 0 \leq x \leq T \quad (6)$$

и для производящих функций моментов разорения:

$$B_T(x, \lambda) = R_x(\lambda) / R_T(\lambda) \quad (7)$$

$$B^T(x, \lambda) = [1 - (\lambda - 1) \sum_{k=1}^T R_k(\lambda)] R_x(\lambda) / R_T(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_{k=1}^x R_k(\lambda). \quad (8)$$

Для доказательства теоремы составим стохастические соотношения для индикаторов разорения (2) по стандартной схеме с учетом первого скачка:

$$I^T(x) \doteq I^T(x - \xi_1); \quad I^T(x) = 1, x \leq 0; \quad I^T(T) = 0; \quad (9)$$

и

$$I_T(x) \doteq I_T(x - \xi_1); \quad I_T(x) = 0, x \leq 0; \quad I_T(T) = 1. \quad (10)$$

Поясним, например, соотношения (10). Как уже указывалось, индикатор $I_T(x)$ принимает значение 1 на тех траекториях последовательности $\{\lambda_n, n \geq 0\}$, на которых $\lambda_n < x$ до момента τ_{x-T}^- , т.е. до момента достижения уровня $x - T$. После первого шага, величина которого равна ξ_1 , последовательность $\{\lambda'_n = \lambda_n - \xi_1, n \geq 1\}$ эквивалентна последовательности $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ в смысле совпадения распределений соответствующих функционалов. Поэтому функционал $I_T(x - \xi_1)$ одинаково распределен с $I_T(x)$. Дополнительные условия в (9) и (10) очевидны.

Построим еще стохастические соотношения для моментов выхода σ_x^+ и σ_y^- :

$$\sigma_x^+ \doteq 1 + \sigma_{x-\xi_1}^+, \quad x > 0; \quad \sigma_x^+ = 0, \quad x \leq 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{x-T}^- \doteq 1 + \sigma_{x-\xi_1-T}^-, \quad x < T; \quad \sigma_{x-T}^- = 0, \quad x \geq T. \quad (12)$$

Нам кажется, что соотношения (11) и (12) не требуют пояснений. Перейдем от стохастических соотношений (9)-(12) к уравнениям для введенных выше функций (3)-(5).

Учитывая очевидное соотношение $Q^T(x) = 1 - Q_T(x)$, ограничимся рассмотрением $Q_T(x)$. Переходя к математическим ожиданиям в (10), получаем следующую граничную задачу для $Q_T(x)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k Q_T(x-k) - Q_T(x) = 0, \quad 0 < x < T; \quad Q_T(x) = 0, \quad x \leq 0; \quad (13)$$

$$Q_T(T) = 1.$$

Сравнивая эту задачу с уравнением для потенциала (7) § 4.1, приходим к выводу, что $Q_T(x) = R_x / R_T$. Формула (6) получена.

Теперь воспользуемся стохастическими соотношениями (9) и (10) для вывода уравнения для производящей функции $B^T(x, \lambda)$:

$$B^T(x, \lambda) = M[\lambda^{\xi_x} I^T(x)] = \lambda M[\lambda^{\xi_{x-\xi_1}} I^T(x-\xi_1)] = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k B^T(x-k). \quad (14)$$

Дополнительные граничные условия имеют вид

$$B^T(x, \lambda) = 1, \quad x \leq 0; \quad B^T(T, \lambda) = 0. \quad (15)$$

Чтобы привести задачу (14)-(15) к стандартному виду, введем вспомогательную функцию

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = 1 - B^T(x, \lambda). \quad (16)$$

Для нее уравнение имеет вид

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k \tilde{B}^T(x-k, \lambda) - \tilde{B}^T(x, \lambda) = \lambda - 1, \quad 0 \leq x \leq T \quad (17)$$

и граничные условия

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = 0, \quad x \leq 0; \quad \tilde{B}^T(T, \lambda) = 1. \quad (18)$$

Теперь решение задачи (17)-(18) с учетом свойства Б резольвенты (см. § 4.3) запишется в виде

$$\tilde{B}^T(x, \lambda) = C(\lambda) R_x(\lambda) + (\lambda - 1) \sum_{k=1}^x R_k(\lambda), \quad (19)$$

из которого второе граничное условие (18) позволяет определить параметр $C(\lambda)$:

$$C(\lambda) = [1 - (\lambda - 1) \sum_{k=1}^T R_k(\lambda)] / R_T(\lambda). \quad (20)$$

Объединяя (16), (19) и (20), приходим к формуле (8). Наконец, используя стохастические соотношения (10) и (12), для функции $B_T(x, \lambda)$ получим следующую граничную задачу:

$$\lambda \sum_{k=1}^{\infty} p_k B_T(x-k, \lambda) - B_T(x, \lambda) = 0, \quad 0 < x < T \quad (21)$$

с дополнительными условиями:

$$B_T(x, \lambda) = 0, \quad x < 0; \quad B_T(T, \lambda) = 1. \quad (22)$$

Отсюда немедленно получаем формулу (7).

Отметим, что рассматриваемые граничные задачи для функций (3)–(5) вообще отличны от тех стандартных задач на полуоси, которые решаются с использованием потенциала и резольвенты, так как здесь стандартное уравнение выполняется лишь в интервале $(0, T)$. Однако, учитывая нулевое граничное условие при $x < 0$, приведенные уравнения можно свести к уравнениям вольтерровского типа, решения которых представимы в стандартной форме через потенциал или резольвенту в каждом конечном интервале.

Обсуждение результатов. 1°. Формулы (6) и (7) можно рассматривать как вероятностную интерпретацию потенциала и резольвенты на полуоси решетчатого случайного блуждания, непрерывного снизу.

2°. Из формулы (6) и асимптотического свойства потенциала (см. § 4.2) следуют известные [20] асимптотические свойства вероятности разорения $Q_T(x)$:

при $M \xi_n < 0$ (отрицательное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(x) = -M \xi_n R_x = P\{\bar{x} < x\}; \quad (23)$$

при $M \xi_n > 0$ (положительное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} s_0^{-T} Q_T(x) = \frac{s_0 q(s_0)}{1 - s_0} R(x); \quad (24)$$

при $M \xi_n = 0$ (нулевое течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(x)/T = \frac{M \xi_n^2}{2} R_x. \quad (25)$$

В частности,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Q_T(uT)/T = u, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (26)$$

что соответствует вероятности разорения в точке $u = T$ для винеровского процесса.

3°. С задачами о разорении тесно связан еще один интересный функционал — момент прохождения заданного уровня [18], который определяется следующим образом:

$$V_x = \min\{n > 0 : R_{n-1} = x+1, R_n = x\}. \quad (27)$$

Для отрицательных значений x функционал V_x имеет производящую функцию (см. [3] § 13)

$$M_N V_x = s^{-x}(N), \quad x < 0. \quad (28)$$

Для неотрицательных x функционал V_x удовлетворяет стохастическому соотношению

$$V_x \stackrel{d}{=} 1 + V_{x-\xi_1}, \quad x \geq 0, \quad (29)$$

из которого с учетом (28) легко получить следующую граничную задачу для производящей функции $G_x(N) = M_N V_x$:

$$N \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k G_{x-k}(N) + q G_{x+1}(N) \right] - G_x(N) = 0, \quad x \geq 0 \quad (30)$$

и дополнительное условие (28). Введем, как обычно, вспомогательную функцию $\tilde{G}_x(N) = G_x(N) - s^{-x}(N)$ и получим для нее стандартную граничную задачу:

$$N \left[\sum_{k=0}^{\infty} p_k \tilde{G}_{x-k}(N) + q \tilde{G}_{x+1}(N) \right] - \tilde{G}_x(N) = 0, \quad x \geq 0; \quad (31)$$

$$\tilde{G}_x(N) = 0, \quad x < 0.$$

Ее решение имеет вид

$$\tilde{G}_x(N) = C(N) R_{x+1}(N). \quad (32)$$

Так что

$$M_N V_x = s^{-x}(N) + C(N) R_{x+1}(N). \quad (33)$$

Теперь, как обычно, для определения параметра $C(N)$ воспользуемся аналитическими соображениями. Перейдем в (33) к производящим функциям X :

$$\sum_{x=0}^{\infty} s^x M \lambda^{2x} = \frac{1}{1 - s/s(\lambda)} + C(\lambda)/s k_{\lambda}(s). \quad (34)$$

Так как $k_{\lambda}(s)$ имеет внутри единичного круга $|s| < 1$ нуль $s(\lambda)$ для $|\lambda| < \lambda_0$, а функция, стоящая слева от знака равенства в (34), регулярна внутри единичного круга по s , то отсюда следует, что

$$C(\lambda) = s^2(\lambda)/s'(\lambda). \quad (35)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$M \lambda^{2x} = s^{-x}(\lambda) - s^2(\lambda) R_{x+1}(\lambda)/s'(\lambda). \quad (36)$$

Если теперь сравнить (36) с представлением резольвенты (11) § 4.3, то можно получить представление производящей функции момента прохождения заданного уровня через одномерные распределения последовательности $\{\lambda_n, n \geq 0\}$:

$$M \lambda^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \rho\{\lambda_n = x+1\} s^2(\lambda)/s'(\lambda), \quad x \geq 0. \quad (37)$$

Здесь: $z = (1 + \lambda)^{-1}$.

§ 5.3. Случайное блуждание с отражением

Рассмотрим решетчатое случайное блуждание $\lambda_n^I, n \geq 0$, непрерывное снизу, с задерживающим экраном, которое для $k > 0$ совпадает со значением $\lambda_n + I$, а при $\lambda_n^I = 0$ происходит задержка последовательности λ_n^I на уровне $x = 0$ случайное число шагов ξ , имеющее геометрическое распределение с параметром q :

$$\rho\{\xi = k\} = q^{k-1} p, \quad k \geq 1; \quad p = 1 - q \quad (1)$$

и затем происходит скачок на величину $\xi +$, независимую от ξ , с производящей функцией

$$M s^{\xi+} = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \rho_n. \quad (2)$$

Случайное блуждание с отражением $\lambda_n^T, n \geq 0$ можно задать следующим образом:

$$\lambda_n^T = \lambda_n + T - \min_{0 \leq m \leq n} (0, \lambda_m + T). \quad (3)$$

В теории массового обслуживания последовательность $\lambda_n^T, n \geq 0$, описывает виртуальное время ожидания и детально изучена [3].

Рассмотрим задачу достижения последовательностью $\lambda_n^T, n \geq 0$, некоторого положительного уровня.

Определим случайную величину θ_k^T — время достижения последовательностью $\lambda_n^{T-k} - T + k, n \geq 0$, положительного уровня k ($0 \leq k \leq T$):

$$\theta_k^T = \min \{n > 0 : \lambda_n^{T-k} - T + k \geq k\}. \quad (4)$$

Случайное блуждание с отражением $\lambda_n^T(k) = \lambda_n^{T-k} - T + k, n \geq 0$, имеет нулевое начальное значение: $\lambda_0^T(k) = 0$ и отражающий экран на уровне $k - T \leq 0$ (рис. 6).

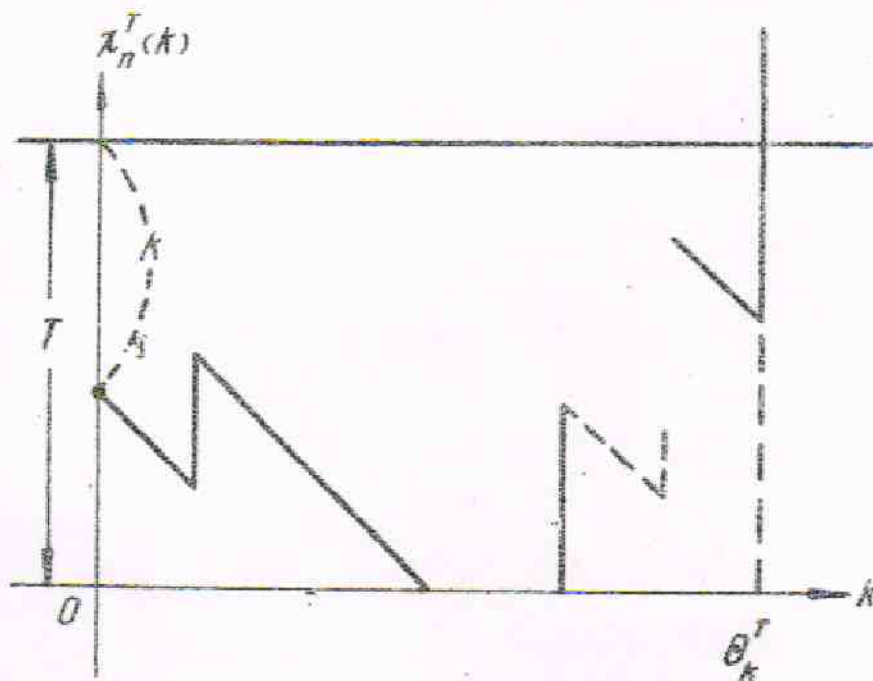


Рис. 6.

Приведенный выбор системы отсчета наиболее целесообразный с учетом применяемого здесь аналитического аппарата.

Основной результат выглядит следующим образом.

Теорема. Для производящей функции момента θ_k^T достижения уровня k ($0 \leq k \leq T$) последовательностью $\lambda_n^T(k) = \lambda_n^{T-k} - T+k, n \geq 0$, имеет место представление

$$M\lambda^{\theta_k^T} = 1 + z [C_T(z)R_{k+1}(z) + \sum_{n=1}^{k+1} R_n(z)], \quad (5)$$

где

$$C_T(z) = R_{T+2}(z) / [R_{T+1}(z) - R_{T+2}(z)], \quad z = \lambda^{-1} - 1. \quad (6)$$

В частности, для математического ожидания θ_k^T справедлива формула

$$M\theta_k^T = R_{T+2}R_{k+1} / (R_{T+2} - R_{T+1}) - \sum_{n=1}^{k+1} R_n. \quad (7)$$

Доказательство. Исходным объектом изучения служит стохастическое соотношение для θ_k^T :

$$\theta_k^T = 1 + \theta_{k-\xi}^T, \quad 0 \leq k < T; \quad \theta_k^T = 0, \quad k < 0, \quad (8)$$

$$\theta_T^T = \xi + \theta_{T-\xi}^T. \quad (9)$$

Соотношения (7) очевидны. Соотношение (8) объясняется наличием задерживающего экрана и тем, что $\lambda_n^T(T) = \lambda_n^0$, т.е. θ_T^T есть время достижения уровня T последовательностью λ_n^0 , $n \geq 0$, с началом в нуле и задерживающим экраном на нулевом уровне. При этом последовательность λ_n^0 задерживается на нулевом уровне время ξ с распределением (1) и затем получает приращение ξ_+ с производящей функцией (2). Чтобы составить уравнение для производящей функции $Q_k^T(z) = M\lambda^{\theta_k^T}$, воспользуемся соотношениями (8) и (9). Из (8) получаем стандартное уравнение

$$z \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n Q_{k-n}^T(z) + q Q_k^T(z) \right] - Q_k^T(z) = 0, \quad 0 \leq k \leq T \quad (10)$$

и дополнительное условие

$$Q_k^T(\lambda) = 1, \quad k < 0. \quad (11)$$

Граничное соотношение (9) дает (напомним — ξ и ξ_+ независимы):

$$Q_T^T(\lambda) = \frac{\lambda}{1 - \lambda q} \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n Q_{T-n}^T(\lambda). \quad (12)$$

Сравнивая уравнение (10) при $k=T$ с условием (12), можно положить

$$Q_{T+1}^T(\lambda) = Q_T^T(\lambda). \quad (13)$$

Чтобы воспользоваться резольventой для представления решения задачи (10), (11), (13), введем вспомогательную функцию

$$\tilde{Q}_k^T(\lambda) = 1 - Q_k^T(\lambda). \quad (14)$$

Тогда для нее получим стандартную задачу

$$\lambda \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \tilde{Q}_{k-n}^T(\lambda) + q \tilde{Q}_{k+1}^T(\lambda) \right] - Q_k^T(\lambda) = \lambda - 1, \quad 0 \leq k \leq T \quad (15)$$

с условиями

$$\tilde{Q}_k^T(\lambda) = 0, \quad k < 0; \quad \tilde{Q}_{T+1}^T(\lambda) = \tilde{Q}_T^T(\lambda). \quad (16)$$

Теперь решение задачи (15)–(16) представим в стандартном виде (см. (12) § 4.3; $x = \lambda^{-1} - 1$):

$$\tilde{Q}_k^T(\lambda) = -x \left[C_T(x) R_{k+1}(x) + \sum_{n=0}^{k+1} R_n(x) \right]. \quad (17)$$

Из второго граничного условия в (16) находим выражение для $C_T(x)$:

$$C_T(x) = R_{T+2}(x) / [R_{T+1}(x) - R_{T+2}(x)] \quad (18)$$

формулы (14), (17) и (18) приводят к (5) и (6).
Чтобы получить выражение для математического ожидания θ_x^T

заметим, что

$$M\theta_k^T = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{1 - M\lambda^{\theta_k^T}}{\lambda^{-1} - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} [-C_T(z)R_{k+1}(z) - \sum_{n=1}^{k+1} R_n(z)] = -C_T(0)R_{k+1} - \sum_{n=1}^{k+1} R_n.$$

При этом (см. (18))

$$-C_T(0) = R_{T+2} [R_{T+2} - R_{T+1}], \quad (19)$$

что и приводит к (7).

Подобно тому, как в § 3.8, был осуществлен асимптотический анализ распределения величины θ_k^T , можно получить аналогичные предельные теоремы для распределения θ_k^T , используя формулы (5)–(7) и асимптотическое представление потенциала (см. § 4.2).

Приведем окончательный результат без доказательства, которое можно провести по схеме § 3.8.

Теорема 2. В условиях леммы о факторизации (§ 4.2) имеют место следующие предельные соотношения:

при $M\varphi_n > 0$ (положительное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\lambda^{\theta_k^T} = M\lambda^{\varphi_k}; \quad (20)$$

при $M\varphi_n < 0$ (отрицательное течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Me^{-\lambda s_0 - T\theta_k^T} = P\{\bar{\mu} > k\} + P\{\bar{\mu} \leq k\} \frac{C}{C+k}, \quad (21)$$

где

$$C = [M\varphi_n]^2 / s_0 g(s_0); \quad (22)$$

при $M\varphi_n = 0$ (нулевое течение)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Me^{-\lambda k_T / T^2} = \frac{\operatorname{ch}(1-u)\sqrt{nd}}{\operatorname{ch}\sqrt{nd}}, \quad d = \frac{1}{g_0(1)}, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad (23)$$

где

$$\lim_{T \rightarrow \infty} k_T / T = u.$$

Глава 6 ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА ПОЛУОСИ

Сложные пуассоновские процессы и их дискретный аналог используются для описания самых разнообразных прикладных задач теории массового обслуживания, теории надежности, теории запасания, теории страхования и т.д.

Большое количество типичных примеров приведено в книге В.Феллера [21] и особенно в книге Л.Такача [20].

Для полноты изложения и иллюстрации приемов описания прикладных задач на языке математических моделей рассмотрим несколько типичных примеров реальных процессов, которые описываются сложными пуассоновскими процессами.

§ 6.1. Процессы обслуживания

По-видимому, проще всего задавать процессы обслуживания посредством управляющих случайных последовательностей и алгоритмом их взаимодействия. Такой подход изложен систематически в книге А.А.Боровкова [3]. Другой подход, основанный на представлении процессов обслуживания в виде векторного многокомпонентного случайного процесса с дискретным вмешательством случая, рассмотрен в книге Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко [6]. Ограничимся лишь иллюстративными примерами простейших процессов обслуживания, возникающих в одноканальных системах с очередью.

Рассмотрим систему обслуживания, состоящую из одного обслуживающего прибора с временем обслуживания ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x) = P\{\xi \leq x\}, (x \geq 0)$. Входной поток требований — простейший, т.е. интервалы между соседними требованиями — независимые случайные величины ξ_n , по-казательно распределенные с параметром $\alpha > 0: P\{\xi_n > t\} = e^{-\alpha t}$.

Процесс обслуживания задается двумерной управляющей последовательностью $\{\xi_n, \zeta_n, n \approx 1\}$ независимых в совокупности одинаково распределенных (по параметру α) неотрицательных случайных величин.

Система обслуживания функционирует следующим образом. Требования входного потока поступают на обслуживающий прибор в порядке поступления. Не принятые к обслуживанию требования образуют очередь. Обслуженные требования покидают систему.

Если обслуживающий прибор свободен, то поступившее вновь требование начинает обслуживаться немедленно. В начальный момент система свободна.

Состояние системы обслуживания может быть задано с помощью различных ее характеристик. Наиболее естественными и существенными характеристиками системы являются время ожидания и длина очереди.

Время ожидания $\omega(t)$ в момент времени t определяется как время, необходимое для завершения обслуживания всех требований, поступивших в систему до момента t . Образно говоря, $\omega(t)$ — время ожидания начала обслуживания требования, пришедшего в момент t . В связи с этим $\omega(t)$ называется также виртуальным (возможным) временем ожидания.

Длина очереди $d(t)$ в момент времени t определяется как число требований, поступивших в систему до момента t , и необслуженных, включая требование, находящееся на обслуживании.

Пусть $\nu_a(t)$ — пуассоновский процесс с параметром a . В рассматриваемой системе обслуживания $\nu_a(t)$ интерпретируется, очевидно, как число требований, поступивших в систему за время t :

$$\nu_a(t) = \min \left\{ n : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t \right\},$$

где ξ_k — интервал между $(k-1)$ -м и k -м требованиями.

Процесс обслуживания можно задать также управляющим процессом [20] $\lambda_1(t) = \sum_{k=1}^{\nu_a(t)} \xi_k - t$, который, как легко понять, является сложным пуассоновским процессом с единичным сносом (см. § 1.4 п.5).

В системе обслуживания $\lambda_0(t) = \sum_{k=1}^{\nu_a(t)} \xi_k$ интерпретируется как суммарное время, необходимое для обслуживания всех требований, поступивших до момента t . Тогда $\lambda_1(t) = \lambda_0(t) - t$ есть время, которое необходимо еще затратить на обслуживание требований после момента t при условии, что обслуживающий прибор не простаивал на отрезке времени $[0, t]$.

Введем процесс $\alpha(t)$ — суммарное время простоев прибора до момента t . Процесс $\alpha(t)$ можно определить соотношением [3, 20]:

$$\alpha(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} (0, t - \lambda_0(u)) = -\inf_{0 \leq u \leq t} (0, \lambda_1(u)). \quad (1)$$

Действительно, соотношение (1) лучше всего объясняется наглядно (рис. 7).

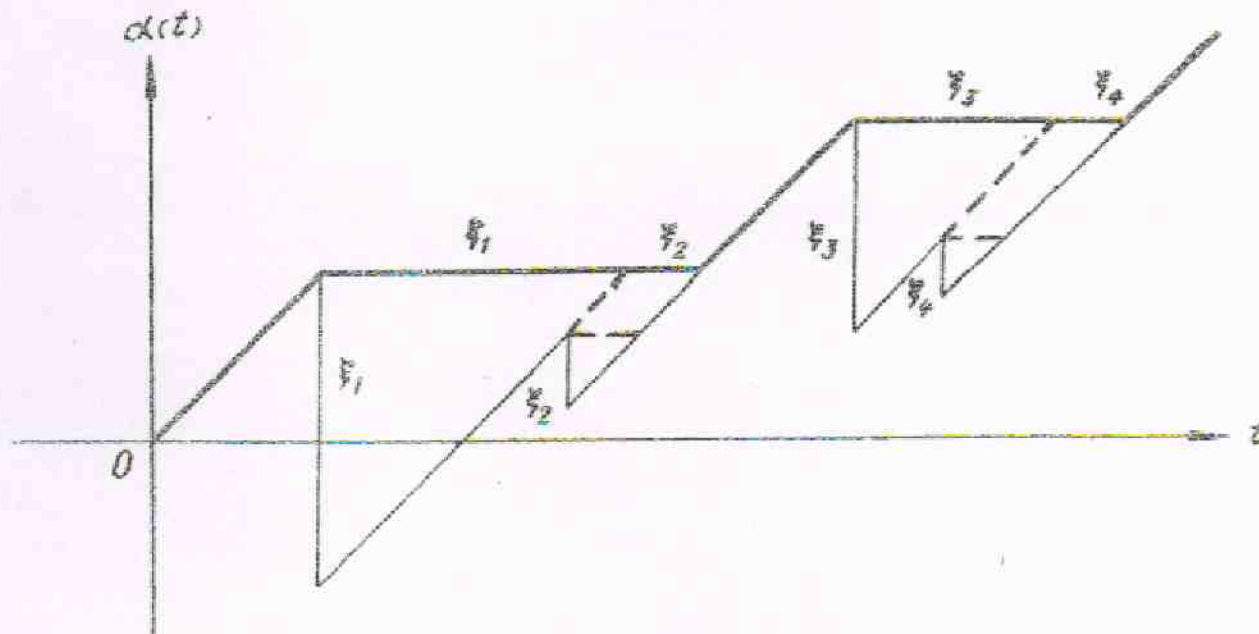


Рис. 7.

Теперь время ожидания $\omega(t)$ задается соотношением

$$\omega(t) = \mu_T(t) + \alpha(t). \quad (2)$$

А это и есть сложный пуассоновский процесс с отражением (см. § 3.7). Если предположить, что в начальный момент $t = 0$ система занята обслуживанием требования, остаточное время обслуживания которого равно T , тогда в обозначениях § 3.7 виртуальное время ожидания $\omega_T(t)$ определяется соотношением

$$\omega_T(t) = \mu_T(t). \quad (3)$$

Таким образом, результаты § 3.7 и 3.8 интерпретируются в рассматриваемой однолинейной системе обслуживания следующим образом. Случайная величина θ_x^{T+x} — время достижения процессом ожидания $\omega_T(t)$ уровня $T+x$. Или иначе, распределение максимума виртуального времени ожидания на конечном временном интервале определяется распределением случайной величины θ_x^{T+x} :

$$P\left\{\max_{0 \leq u \leq t} \omega_t(u) \leq T+x\right\} = P\left\{\theta_x^{T+x} \geq t\right\}. \quad (4)$$

Асимптотическое поведение распределения случайной величины θ_x^T зависит от значения математического ожидания от управляющего процесса $\lambda_1(t)$, вернее, от $M\lambda_1(t) = aM\zeta - 1 = M\zeta / M\xi - 1$.

Известно [3], что режим работы системы определяется знаком $M\lambda_1(t)$:

при $M\lambda_1(t) > 0$ ($M\zeta > M\xi$), т.е. среднее время обслуживания требования превосходит средний интервал между требованиями, режим работы надкритический. Время ожидания растет вместе с ростом очереди до бесконечности.

При $M\lambda_1(t) = 0$ ($M\zeta = M\xi$) режим работы системы критический. В этом случае асимптотические результаты § 3.8 позволяют заключить, что нормированный максимум виртуального времени ожидания на конечном интервале асимптотически, при достаточно больших T распределен как максимум винеровского процесса с отражением (см. п.3^о теоремы 2 § 3.8).

В наиболее интересном стационарном случае, при $M\lambda_1(t) < 0$ ($M\zeta < M\xi$) существует стационарный режим работы системы обслуживания. Стационарное распределение процесса ожидания $\omega_T(t)$ задает потенциал $W(x) = -M\lambda_1(t) R(x)$. А для распределения максимальных значений процесса ожидания $\omega_T(t)$ можно предложить следующую приближенную формулу при больших x :

$$P\left\{\max_{0 \leq u \leq t} \omega_T(u) \leq x\right\} \approx W(x) \exp[-ce^{s_0 x} t]. \quad (5)$$

Здесь константа C определяется формулой (16) § 3.8.

Рассмотрим процесс обслуживания в дискретные моменты времени t_n — моменты начала обслуживания n -го требования. Управляющий процесс, который задает эволюцию системы обслуживания в моменты времени t_n , определяется случайными величинами $\nu_n = \nu_a(\xi_n)$ — число требований входящего потока, поступивших за время ξ_n обслуживания n -го требования. Управляющий процесс задается следующим образом:

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n \nu_k - n, \quad n \geq 0, \quad \lambda_0 = 0.$$

Процесс $\{\lambda_n, n \geq 0\}$ определяет решетчатое случайное блуждание, непрерывное снизу (см. § 1.3 п.1).

Рассмотрим процесс образования длины очереди $d(t)$ в моменты времени $t_n: d_n = d(t_n)$. Процесс $d(t)$ предполагается непрерывным справа, так что d_n есть длина очереди в системе (включая требования, поступившие на обслуживание) сразу после момента начала обслуживания n -го требования.

Нетрудно понять, что процесс $\{d_n, n \geq 0\}$ определяется следующим образом:

$$d_{n+1} = (d_n + \lambda_n) I(d_n > 0) + I(d_n = 0). \quad (6)$$

Соотношение (6) задает решетчатое случайное блуждание на множестве неотрицательных целых чисел с отражением в нуле. Условие отражения таково, что из нуля процесс $\{d_n, n \geq 0\}$ с вероятностью единица переходит в точку 1. В этом случае граничное условие для момента θ_k^T (см. § 5.3) имеет вид

$$\theta_T^T = 1 + \theta_{T-1}^T. \quad (7)$$

Откуда для $\theta_k^T(N) = M_N \theta_k^T$ находим

$$Q_T^T(N) = \lambda Q_{T-1}^T. \quad (8)$$

Так что окончательно получаем

$$Q_k^T(N) = 1 + \lambda \left[C_T(z) R_{k+1}(z) + \sum_{m=1}^{k+1} R_m(z) \right], \quad (9)$$

где

$$C_T(z) = (\lambda^{-1} - 1) \frac{1 - z [R_{T+1}(z) + \sum_{m=1}^{T+1} R_m(z)]}{R_{T+1}(z) - \lambda R_T(z)}, \quad z = \lambda^{-1} - 1. \quad (10)$$

Можно проверить, что и в данном случае с $C_T(z)$, определяемой формулой (10), имеет место предельная теорема § 5.3. Так что о поведении длины очереди в системе можно сформулировать те же выводы, что и для процесса ожидания.

§ 3.2. Процессы запасания

Сложный пуассоновский процесс служит удобной математической моделью в самых разнообразных прикладных задачах. Мы приведем здесь интерпретацию в задачах управления запасами и задачах страхования [20, 21].

п.1. В задачах управления запасами значение сложного пуассоновского процесса со сносом $\lambda_c(t) = \lambda(t) - ct$ определяет уровень запасов в хранилище, в котором с постоянной скоростью c происходит убывание запасов и по пуассоновскому закону (т.е. через экспоненциально распределенные промежутки времени) происходит пополнение запасов порциями, имеющими функцию распределения $F(x)$.

Цель управления запасами состоит в том, чтобы обеспечить, с одной стороны, пополнение запасов, исключаящее полное истощение хранилища, т.е. достижения процессом $\lambda_c(t)$ нулевого уровня, а с другой, исключение переполнения хранилища, имеющего, естественно, ограниченную вместимость, т.е. достижения процессом $\lambda_c(t)$ некоторого положительного уровня Γ .

Таким образом, задачи о разорении, рассмотренные в § 3.6, содержат всю необходимую исходную информацию для решения задач управления запасами. Возникающие при этом задачи носят оптимизационный характер. Мы надеемся, что формулы, приведенные в § 3.6, позволят получить эффективное решение этих задач.

Отметим, что в задачах управления запасами могут быть использованы также результаты § 3.7, 3.8, относящиеся к процессу с отражением. Действительно, при рассмотрении поведения уровня запасов на большом временном интервале можно ожидать, что могут наступать моменты полного истощения хранилища, т.е. моменты достижения нулевого уровня, после чего хранилище снова наполняется при поступлении следующей порции. Так что уровень запасов описывается процессом с отражением. При этом мы получаем интерпретацию результатов § 3.7.

Стационарный уровень ω запасов описывается распределением $P\{\omega < x\} = -M\lambda_c(1)R(x) \approx 1 - Re^{-s_0 x}$, где константа Крамера R и корень s_0 определяются формулами § 2.2. Причем стационарность уровня имеет место при $M\lambda_c(1) = \frac{M\eta}{M\xi} - c < 0$, т.е. когда среднее значение одной порции пополнения $M\eta$ меньше среднего количества убывания запасов $cM\xi$. Легко понять, что в этом случае хранилище довольно часто оказывается пустым.

Представляет интерес задача определения времени пребывания процесса $\lambda_c(t)$ на нулевом уровне. Эту задачу можно решить, используя результаты § 3.6–3.8.

п.2. В задачах страхования уровень фонда страхования определяется значениями процесса $ct - \lambda(t) + x$, где константа c определяет размер поступающих страховых взносов за единицу времени, x – начальный страховой фонд, а пуассоновский процесс $\lambda(t)$ определяет количество страховых сумм, выплаченных за время t , при условии, что случаи выплаты страховых сумм образуют простейший пуассоновский поток, а размер единичной страховой суммы φ имеет функцию распределения $F(x)$.

Задача об истощении страхового фонда сводится при этом к задаче о достижении процессом $ct - \lambda(t) + x$ нулевого уровня, или, что то же самое, достижении процессом $\lambda(t) - ct$ уровня x (см. § 3.2). Стационарное распределение $W(x) = -M\lambda_c(t)R(x)$ в этом случае определяет уровень страхового фонда в стационарном режиме, который имеет место при $M\lambda_c(t) < 0$.

п.3. Модель электрической активности нейронов. Приведем еще одну интересную интерпретацию сложного пуассоновского процесса с отражением в качестве модели спонтанной электрической активности нейронов [15]. Известно, что электрическая активность нейронов осуществляется по следующей схеме. Нейрон выдает электрический импульс, когда потенциал мембраны достигает определенного уровня T . Изменение потенциала мембраны происходит за счет, во-первых, поступающих на входы импульсов от других нейронов или образующихся спонтанно, во-вторых, за счет рассеивания заряда, которое, мы предположим, происходит с постоянной скоростью ν .

Сложный пуассоновский процесс с отражением $\lambda_T(t)$, рассмотренный в § 3.7, можно интерпретировать как уровень потенциала мембраны нейрона в момент времени t . Скорость разрядки ν можно, не ограничивая общности, считать равной 1, а скачки φ процесса $\lambda_T(t)$ определяют порции импульсов, поступающих на входы нейрона. В случае спонтанной активности предположение о пуассоновском потоке входных импульсов выглядит вполне естественным.

Как только потенциал мембраны достигает уровня T , происходит выдача сигнала (импульса), и потенциал разряжается до нулевого уровня. Затем снова происходит постепенное накопление и рассеивание зарядов до следующего достижения уровня T и т.д.

Задача состоит в изучении потока импульсов на выходе нейрона. В рассматриваемой математической модели эта задача сводится к изучению распределения времени θ_T^T достижения процессом $\lambda_T(t)$ уровня T .

В предположении, что уровень T значительно превосходит среднюю величину поступающих зарядов $M\zeta$, можно воспользоваться предельной теоремой 2, приведенной в § 3.8, результаты которой интерпретируются здесь следующим образом.

При условии $M\zeta < M\epsilon$, т.е. когда скорость рассеивания зарядов превосходит скорость поступления зарядов на входах нейрона, интервал θ_T^T между выходными импульсами имеет показательное распределение с параметром $c = e^{-s_0 T} \cdot (M\zeta)^2 / (M\epsilon)^2 \alpha_0$ (константы s_0 и α_0 введены в § 2.1 формулами (6) и (17)).

При условии $M\zeta > M\epsilon$, когда скорость поступающих зарядов превосходит скорость рассеивания зарядов, из результатов § 3.2 и 3.8 можно заключить, что интервал θ_T^T между выходными импульсами постоянен и равен $T / [M\zeta - M\epsilon]$ с погрешностью, имеющей нормальное распределение.

Случай $M\zeta = M\epsilon$ является переходным между двумя устойчивыми состояниями нейрона, описанными выше. В этом случае интервал между выходными импульсами θ_T^T пропорционален T^2 .

Итак, можно сформулировать следующую гипотезу, требующую экспериментальной проверки.

В спокойном состоянии нейрон генерирует пуассоновский поток импульсов, параметр C которого удовлетворяет соотношению

$$\ln c = s_0 T, \quad (1)$$

где T — пороговый потенциал мембраны нейрона, s_0 — коэффициент пропорциональности, характеризующий уровень спонтанной активности нейрона.

В возбужденном состоянии нейрон генерирует детерминированную последовательность импульсов, интервал между которыми удовлетворяет соотношению

$$M\theta_T^T \approx \varphi T. \quad (2)$$

Здесь φ — коэффициент пропорциональности, характеризующий степень возбуждения нейрона.

Учитывая, что спокойное и возбужденное состояния нейрона существенно различаются, ибо в первом случае $M\theta_T^T \approx e^{-s_0 T}$, а во втором $M\theta_T^T \approx \varphi T$; можно надеяться, что экспериментальная проверка приведенной гипотезы доступна на современном уровне физиологических экспериментов.

Глава 7
ДОПОЛНЕНИЕ

Здесь обсуждаются возможности и перспективы метода применительно к более общим процессам с независимыми приращениями.

§ 7.1. Потенциал и резольвента смеси пуассоновского и винеровского процессов

В § 1.4. был указан еще один общий тип случайных блужданий, для которого возможно построение потенциала и резольвенты на полуоси путем аналитического продолжения символа производящего оператора, а именно, смесь пуассоновского и винеровского процессов.

Введем обозначения: $\lambda_0(t)$ - сложный пуассоновский процесс с символом $k_0(s) = \alpha(f(s)-1) + s$, $f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} df(x)$,

$F(x) = P\{ \xi \leq x \}$ - функция распределения скачков процесса, α - параметр показательного распределения интервалов между скачками процесса; $W(t)$ - винеровский процесс с $MW(t) = 0$ и $DW(t) = \sigma^2 t$.

Сумма независимых процессов $\lambda_0(t) + W(t) = \lambda_G(t)$ имеет символ

$$k(s) = \alpha(f(s)-1) + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2. \quad (1)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в § 2.1, построим факторизацию символа $k(s)$.

Лемма. В условиях § 2.1 при $M\lambda_0(1) \neq 0$ символ $k(s) = \alpha(f(s)-1) + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2$ представим в виде

$$k(s) = s(s-s_0)g_G(s), \quad (2)$$

где

$$g_G(s) = \frac{\sigma^2}{2} + g(s), \quad (3)$$

функция $g(s)$ введена формулами (7)-(9) § 2.1. Здесь s_0 - корень уравнения $k(s_0) = 0$.

При $M\lambda_0(l) = 0$ имеет место факторизация символа в виде

$$k(s) = s^2 g_G(s), \quad (4)$$

где

$$g_G(s) = \frac{\sigma^2}{2} + g_0(s). \quad (5)$$

Функция $g_0(s)$ определена формулами (11)–(13) § 2.1.

Доказательство леммы, по существу, совпадает с доказательством, приведенным в § 2.1.

Теперь мы можем определить потенциал процесса $\lambda_G(t)$ на полуоси следующим образом.

Определение. Потенциал $R_G(x)$ процесса $\lambda_G(t)$ задается своим преобразованием Лапласа при $Re s > 0$:

$$r_G(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} R_G(x) dx = 1 / [\alpha(f(s) - 1) + s + \frac{\sigma^2}{2} s^2]. \quad (6)$$

Из этого определения и факторизационной леммы следует

Свойство 1. Потенциал $R_G(x)$ асимптотически представим в виде:

при $M\lambda_0(l) \neq 0$

$$R_G(x) = -\frac{1}{M\lambda_0(l)} [1 - Re^{s_0 x} - V_G(x)], \quad 0 \leq x < \infty; \quad (7)$$

при $M\lambda_0(l) = 0$

$$R_G(x) = \frac{2}{\sigma^2} [x - R_0 - V_G^0(x)], \quad 0 \leq x < \infty. \quad (8)$$

Здесь постоянная Крамера R задается формулами

$$R = \frac{g(0)}{g(s_0)}; \quad R_0 = \frac{g_0'(0)}{g_0'(0)}. \quad (9)$$

Погранслои $V_G(x)$ и $V_G^0(x)$ определяются своими преобразованиями Лапласа:

$$v_G(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} V_G(x) dx = \frac{1}{g_G(s)} \left[\frac{g(s) - g(0)}{s} - R \frac{g(s) - g(s_0)}{s - s_0} \right]; \quad (10)$$

$$V_G^0(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} V_G^0(x) dx = \frac{1}{g_G(s)} \left[\frac{g_0(s) - s g_0'(x) - g_0'(0)}{s^2} - R_0 \frac{g_0(s) - g_0(0)}{s} \right]. \quad (11)$$

Для доказательства свойства 1 достаточно проверить, что преобразование Лапласа правых частей в (7) и (8) с учетом (9)–(11) совпадает с правой частью (6) (см. также доказательство теоремы 1 § 2.2).

Доказательство теоремы 1 § 2.2 позволяет также установить основное свойство потенциала.

Свойство 2. Общее решение интегродифференциального уравнения

$$K_G u(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{dU(x)}{dx} + a \int_0^{\infty} [U(x-y) - U(x)] dF(y) = \varphi(x), \quad (12)$$

$$0 \leq x < \infty,$$

при условии

$$u(x) = 0, \quad x < 0, \quad (13)$$

представимо в виде

$$U(x) = C R_G(x) + \int_0^x R_G(x-y) \varphi(y) dy, \quad (14)$$

где C — произвольная постоянная.

Введем теперь резольвенту $R_G(x, \lambda)$ случайного блуждания на полуоси $x \geq 0$, описываемого процессом $\mathcal{R}_G(t)$, соотношением

$$R_G(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_G^{(n+1)*}(x). \quad (15)$$

Не представляет большого труда убедиться в том, что резольвента $R_G(x, \lambda)$ обладает следующим основным свойством.

Свойство 3. Общее решение уравнения

$$K_G u_\lambda(x) - \lambda u_\lambda(x) = \varphi_\lambda(x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (16)$$

при условии

$$U(x) = 0, \quad x < 0 \quad (17)$$

представимо в виде

$$U_{\lambda}(x) = \int_0^x R_G(x-y, \lambda) \varphi_{\lambda}(y) dy. \quad (18)$$

Указанные свойства 2 и 3 и являются исходными при решении граничных задач для процесса $\lambda_G(t)$, аналогичных тем, которые рассмотрены в главе 3 для сложного пуассоновского процесса $\lambda_G(t)$.

Нам остается еще указать, как составляются уравнения (12) или (16) для граничных функционалов от процесса $\lambda_G(t)$. Рассмотрим, например, τ_x — время первого достижения уровня $x > 0$ процессом $\lambda_G(t)$. Введем обозначение:

$$\bar{\lambda}_G(t) = \sup_{0 < u < t} \lambda_G(u). \quad (19)$$

Для достаточно малых $\Delta > 0$ имеют место стохастические соотношения

$$\tau_x = \Delta + I(\bar{\lambda}_G(\Delta) < x) \tau_{x-\lambda_G(\Delta)} - I(\bar{\lambda}_G(\Delta) > x) \delta_{\Delta}, \quad x > 0, \quad (20)$$

$$\tau_x = 0, \quad x < 0.$$

Здесь случайная величина δ_{Δ} удовлетворяет неравенству $0 \leq \delta_{\Delta} < \Delta$. Из этих соотношений следует

$$\frac{1}{\Delta} M[e^{-s\tau_x - \lambda_G(\Delta)} - e^{-s\tau_x}] = \frac{1}{\Delta} (e^{s\Delta} - 1) M e^{-s\tau_x} + \frac{1}{\Delta} M [I(\bar{\lambda}_G(\Delta) > x) (e^{-s\tau_x - \lambda_G(\Delta)} - e^{s\delta_{\Delta}})]. \quad (21)$$

Из известных свойств процесса $\lambda_G(t)$ в [5] следует, что последнее слагаемое в правой части (21) стремится к нулю вместе с $\Delta \rightarrow 0$. Далее, переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, в (21) получаем, используя определение инфинитезимального оператора процесса $\lambda_G(t)$ [5] гл. 1У для функции $\Phi_s(x) = M e^{-s\tau_x}$, уравнение при $x \geq 0$:

$$\lambda \Phi_s(x) = \frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2 \Phi_s(x)}{dx^2} + \frac{d \Phi_s(x)}{dx} + \alpha \int_0^{\infty} [\Phi_s(x-y) - \Phi_s(x)] dF(y) = s \Phi_s(x). \quad (22)$$

§ 7.2. Обобщения

Здесь обсуждается возможность построения потенциала для более общих случайных блужданий на полуоси. Приведенные соображения не претендуют на полноту и строгость, общепринятые в законченных работах. Можно надеяться, что предлагаемый здесь подход не встретит принципиальных затруднений при обосновании.

Будем рассматривать общий сложный пуассоновский процесс со сносом $\lambda_1(t) = \lambda(t) - t$ с кумулянтной

$$K(\lambda) = a(f(\lambda) - 1) - i\lambda, \quad f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} dF(x), \quad (1)$$

предполагая выполненным условие Крамера:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm hx} dF(x) < \infty \quad \text{при } h > 0. \quad (2)$$

Тогда функция $K_1(s) = K(-ts)$ выпукла на отрезке $[-h, h]$. Будем предполагать, что выполнено условие, обеспечивающее существование вещественного корня s_0 уравнения $K(s_0) = 0$, отличного от нуля при $M\lambda_1(1) \neq 0$. Тогда, как и в случае непрерывного снизу случайного блуждания, имеет место лемма о факторизации (см. § 2.1), т.е. разложение

$$K(\lambda) = i\lambda(i\lambda + s_0)g(\lambda), \quad (3)$$

где функция $g(\lambda)$ представима интегралом Фурье в виде

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} b(x) dx, \quad (4)$$

в котором

$$b(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{s_0} \int_x^{\infty} [1 - e^{-s_0(x-y)}] dF(y), & x \geq 0, \\ -\frac{\alpha}{s_0} \int_{-\infty}^x [1 - e^{-s_0(x-y)}] dF(y), & x < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Отличие от результата, полученного в § 2.1, состоит в том, что функция $G(x)$ определена на всей вещественной оси.

Нетрудно показать, что функция $g(\lambda)$ допускает факторизацию:

$$g(\lambda) = g_+(\lambda)g_-(\lambda), \quad (6)$$

в которой $g_{\pm}(\lambda)$ отличны от нуля в правой и левой полуплоскостях соответственно и представимы в виде

$$g_+(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} G_+(x) dx; \quad g_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{i\lambda x} G_-(x) dx. \quad (7)$$

Перейдем теперь к построению решения однородного интегродифференциального уравнения на полуоси $x \geq 0$:

$$KR^0(x) = \frac{dR^0(x)}{dx} + a \int_{-\infty}^{\infty} [R^0(x-y) - R^0(x)] df(y) = 0, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

при дополнительном условии

$$R^0(x) = 0, \quad x < 0; \quad R^0(0) = 1. \quad (9)$$

Факторизации символа оператора (3) соответствует факторизация самого оператора K в виде

$$K = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} - s_0 I \right) G_+ G_-, \quad (10)$$

где интегральные операторы типа свертки G_+ и G_- определяются ядрами (7). Из разложения (10), учитывая построения § 2.2, получаем

$$R^0(x) = \mathcal{L}^0 [1 - Re^{s_0 x} - V(x)], \quad \mathcal{L}^0 = -\frac{1}{s_0 g_+(0)} \quad (11)$$

с преобразованием Фурье в виде

$$r^0(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} R^0(x) dx = [i\lambda(i\lambda + s_0)g_+(\lambda)]^{-1}. \quad (12)$$

Сравнение с результатами § 2.2 показывает, что однородная задача (8)-(9) имеет решение типа потенциала, построенного в § 2.2.

Однако в отличие от ситуации, рассмотренной в гл.2, решение $R^0(x)$ однородной задачи (8)-(9) не обладает всеми свойствами потенциала, приведенными в § 2.3.

Для построения решения неоднородного уравнения

$$\frac{dU(x)}{dx} + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} [U(x-y) - U(x)] df(y) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (13)$$

при условии

$$U(x) = 0, \quad x < 0 \quad (14)$$

применим формально метод [17]. Мы получим для преобразования Фурье $U(\lambda)$ решения $U(x)$ уравнения (13) выражение в виде

$$u(\lambda) = r^0(\lambda) \rho_+ \left[\frac{\varphi(\lambda)}{g_-(\lambda)} \right], \quad (15)$$

где ρ_+ - проектор, который определяется равенством

$$\rho_+ \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \varphi(x) dx \right] = \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} \varphi(x) dx. \quad (16)$$

Анализируя уравнения для граничных функционалов, приведенные в гл.3, заключаем, что во всех случаях правая часть уравнения (13) имеет следующий вид:

$$\varphi(x) = e^{sx}, \quad (1 \leq x < b). \quad (17)$$

В этом случае [17] имеем

$$\rho_+ \left[\frac{1}{g_-(\lambda)(i\lambda + s)} \right] = \frac{1}{g_-(is)(i\lambda + s)}. \quad (18)$$

И тогда решение неоднородной задачи (13)-(14) с правой частью (17) принимает вид

$$u_s(\lambda) = r^0(\lambda) / g_-(is)(i\lambda + s). \quad (19)$$

Или иначе

$$U_s(x) = \frac{1}{g_-(is)} \int_0^x R^0(x-y) e^{sy} dy = \frac{1}{g_-(is)} \int_0^x e^{s(x-y)} R^0(y) dy. \quad (20)$$

Таким образом, общее решение неоднородной задачи (13)-(14) с $\varphi(x) = e^{sx}$ представимо в стандартной форме

$$U(x) = C_s R^0(x) + \frac{1}{g - (is)} \int_0^x e^{s(x-y)} R^0(y) dy, \quad (21)$$

где C_s — параметр, определяемый из дополнительных условий. Так что решение $R^0(x)$ однородной задачи (8)-(9) позволяет получить общее решение неоднородной задачи (13)-(14) при условии, что правая часть в (13) $\varphi(x) = e^{sx}$.

Представляет интерес сравнение изложенного здесь подхода с методом факторизационных тождеств [3, 10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А.А. О распределении величины первого перескока. - В кн.: Труды У1 Всесоюз. совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962.
2. Боровков А.А. О времени первого прохождения для одного класса процессов с независимыми приращениями. - Теория вероятностей и ее применения, 1965, 9, 2.
3. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания, "Наука", М., 1972.
4. Гусак Д.В. О совместном распределении времени и величины перескока для однородных процессов с независимыми приращениями. - Теория вероятностей и ее применения, 1969, 14, 1.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 11. "Наука", М., 1973.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания, "Наука", М., 1966.
7. Гохберг И.Ш., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. "Наука", М., 1971.
8. Гусак Д.В., Королюк В.С. О моменте первого прохождения заданного уровня для процессов с независимыми приращениями. - Теория вероятностей и ее применения, 1968, 13, 3.
9. Гусак Д.В., Королюк В.С. Распределение функционалов от однородных процессов с независимыми приращениями, - В кн.: Теория вероятностей и матем. статистика, вып.1. Изд-во КГУ, 1970.
10. Гусак Д.В. Замечание о распределении времени и величины первого перескока для пуассоновского процесса. - В кн.: Теория случайных процессов. Вопросы статистики и управления. Изд. Ин-та математики АН УССР (в печати).
11. Дьячковский С.В., Супрун В.Н., Пирджанов Б. Изучение величины перескока для обобщенного пуассоновского процесса со

сносом методом потенциала. — В кн.: Теория вероятностей и математической статистике, вып.12, Изд-во КГУ, 1975.

12. Ежов И.И., Королюк В.С., Штатланд Е.С. Про розподіл максимуму процесів з незалежними приростами, керованими ланцюгом Маркова.— ДАН УРСР, 1969, № 2, 115-118.

13. Королюк В.С. Граничные задачи для сложного пуассоновского процесса.—Теория вероятностей и ее применения, 1974,19,1.

14. Королюк В.С. О задачах разорения для сложного пуассоновского процесса.—Теория вероятностей и ее применения,1975, 20,1.

15. В.С.Королюк, Костюк П.Г., Пятигорский Б.Я., Ткаченко Э.П. Математическая модель спонтанной активности некоторых нейронов центральной нервной системы.—Биофизика, 1967, т.12, вып.5.

16. Королюк В.С., Ткаченко Э.П. Асимптотичний розклад твірної функції часу перебування пуассоновського процесу в смузі з затримуючим екраном. — ДАН УРСР, 1970, № 4, 315-317.

17. Крейн М.Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, — Успехи матем.наук , 1958, 13, 5.

18. Печерский Е.А. Некоторые тождества, связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и из полуинтервала. — Теория вероятностей и ее применения, 1974, 19, 1.

19. Рогозин Б.А. О распределении величины первого перескока.— Теория вероятностей и ее применения, 1964, 19, 3.

20. Такач Л. Комбинаторные методы в теории случайных процессов. "Мир", М., 1971.

21. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.2. "Мир", М., 1967.

22. Фохт А.И. О распределении величины первого перескока для обобщенного пуассоновского процесса. — Теория вероятностей и ее применения, 1974, 19, 1.

23. Фохт А.И. Распределение величины первого перескока для одного класса процессов. — Теория вероятностей и ее приложения, 1975, 20,

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. ТИПЫ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ	
§ 1.1. Введение.....	5
§ 1.2. Бернуллиевское случайное блуждание на полуоси	6
§ 1.3. Решетчатое случайное блуждание.....	11
§ 1.4. Случайное блуждание, непрерывное снизу.....	14
Глава 2. ПОТЕНЦИАЛ И РЕЗОЛЬВЕНТА СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА	
§ 2.1. Факторизация символа производящего оператора	20
§ 2.2. Построение потенциала.....	25
§ 2.3. Свойства потенциала.....	30
§ 2.4. Резольвента и ее свойства.....	34
Глава 3. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЖНОГО ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА	
§ 3.1. Распределение максимума пуассоновского процесса	41
§ 3.2. Момент достижения положительного уровня.....	43
§ 3.3. Величина перескока положительного уровня.....	47
§ 3.4. Совместное распределение момента и величины перескока положительного уровня.....	55
§ 3.5. Момент прохождения положительного уровня.....	57
§ 3.6. Задачи о разорении.....	62
§ 3.7. Пуассоновский процесс с отражением.....	70
§ 3.8. Предельное поведение максимума пуассоновского процесса с отражением.....	74
Глава 4. ПОТЕНЦИАЛ И РЕЗОЛЬВЕНТА РЕШЕТЧАТОГО СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ, НЕПРЕРЫВНОГО СНИЗУ	
§ 4.1. Определение и общие свойства потенциала.....	85
§ 4.2. Асимптотическое представление потенциала.....	90
§ 4.3. Резольвента.....	97

Глава 5. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕТЧАТОГО БЛУЖДЕНИЯ	
§ 5.1. Момент достижения и величина перескока заданного уровня	102
§ 5.2. Задачи о разорении	108
§ 5.3. Случайное блуждание с отражением.....	114
Глава 6. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ НА ПОЛУОСИ	
§ 6.1. Процессы обслуживания.....	119
§ 6.2. Процессы запасания.....	124
Глава 7. ДОПОЛНЕНИЕ	
§ 7.1. Потенциал и резольвента смеси пуассоновского и винеровского процессов.....	127
§ 7.2. Обобщения.....	131
Л и т е р а т у р а	135

Владимир Семенович Королук

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ПУАССОНОВСКИХ
ПРОЦЕССОВ

Печатается по постановлению ученого совета
Института математики АН УССР

Редактор *Ж. Е. Квятковская*
Оформление художника *Г. М. Балюна*
Художественный редактор *Н. И. Возный*
Технический редактор *И. М. Баяджиева*